

Equations différentielles 2^{ème} ordre

Corrigé exercice 1

1. L'équation $4y'' + y = 0$ soit $y'' + \frac{1}{4}y = 0$ est une équation différentielle du deuxième ordre sans second

membre de la forme $y'' + w^2 y = 0$ avec $w = \frac{1}{2}$.. Les solutions sont les fonctions de la forme

:

Ses solutions sont les fonctions de la forme : $f(x) = A \cos wx + B \sin wx$; avec $A \in \mathbb{R}$; $B \in \mathbb{R}$; $x \in \mathbb{R}$

et donc ici : $f(x) = A \cos \frac{x}{2} + B \sin \frac{x}{2}$ avec $x \in \mathbb{R}$

2. Puisque $f'(x) = -\frac{A}{2} \sin \frac{x}{2} + \frac{B}{2} \cos \frac{x}{2}$ donc si $f(0) = -\frac{3}{2}$ alors $A = -\frac{3}{2}$ et si $f'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ alors

$$\frac{B}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

et donc $B = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. La solution particulière cherchée est donc la fonction

$$f(x) = \frac{-3}{2} \cos \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{x}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

3.a $f(x) = \frac{-3}{2} \cos \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{x}{2} = \sqrt{3} \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \right) = \sqrt{3} \left(\cos \frac{7\pi}{6} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{7\pi}{6} \sin \frac{x}{2} \right)$ donc

$$f(x) = \sqrt{3} \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{7\pi}{6} \right)$$

b. $f(x) = 1$ si et seulement si $\sqrt{3} \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{7\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ soit ssi $\cos \left(\frac{x}{2} - \frac{7\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$ soit

$$\cos \left(\frac{x}{2} - \frac{7\pi}{6} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right)$$

on a donc $\left\{ \frac{x}{2} - \frac{7\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{x}{2} - \frac{7\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right.$ d'où $\left\{ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right.$

.

et $\left\{ x = \frac{3\pi}{2} + 4k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{2} + 4k\pi \right.$ dans l'intervalle $[0; 4\pi[$ les solutions sont $x = \frac{3\pi}{2}$ et $x = \frac{5\pi}{2}$

4. la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0; \pi/3]$ est égale : $m = \frac{1}{(\pi/3) - 0} \int_0^{\pi/3} f(x) dx$

$$m = \frac{3}{\pi} \int_0^{\pi/3} \sqrt{3} \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{7\pi}{6} \right) dx ; m = \frac{6\sqrt{3}}{\pi} \left[\sin \left(\frac{x}{2} - \frac{7\pi}{6} \right) \right]_0^{\pi/3} ; m = \frac{6\sqrt{3}}{\pi} \left[\sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{6} \right) - \sin \left(-\frac{7\pi}{6} \right) \right]$$

$$m = \frac{6\sqrt{3}}{\pi} \left[\sin(-\pi) + \sin \left(\frac{7\pi}{6} \right) \right] ; m = \frac{6\sqrt{3}}{\pi} \left[\frac{-1}{2} \right] ; m = -\frac{3\sqrt{3}}{\pi}.$$