Equations différentielles 2^{eme} ordre

Exercice 2

(E) $4y''+49y=0$. $y''+\frac{49}{4}y=0$ et $y''+\left(\frac{7}{2}\right)^2 y=0$ L'équation différentielle (E) est de la forme $y'' + w^2y = 0$

avec $w=\frac{7}{2}$.Donc ses solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme f(x) = A cos w x + B sin $w\,x$, les solutions de cette équation sont donc les fonctions :

$f(x)=A\cos\left(\frac{7}{2}x\right)+B\sin\left(\frac{7}{2}x\right)$ où A et B sont deux constantes réelles.

2. $f(\frac{\pi}{3})=-1$ et $f(\pi)=1$. $f(\frac{\pi}{3})=A\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+B\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \Leftrightarrow A\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+B\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-1 \Leftrightarrow$

$-A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-B\left(\frac{1}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow A\sqrt{3}+B=2$. $f(\pi)=1$ et $f(\pi)=A\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right)+B\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$

$A\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right)+B\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right)=1$

$\Leftrightarrow B(-1)=1 \Leftrightarrow B=-1$. $\begin{cases}A\sqrt{3}+B=2\\B=-1\end{cases}$ $\begin{cases}\sqrt{3}A=3\\B=-1\end{cases}$ $\{B=-1$; $A=\sqrt{3}$. Donc

$f(x)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{7}{2}x\right)-\sin\left(\frac{7}{2}x\right)$

3. $f(x)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{7}{2}x\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{7}{2}x\right)\times\sin(\frac{\pi}{4})\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{7}{2}x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{7}{2}x\right)\right)=2\cos\left(\frac{7x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

4. $\int_0^{\pi/7} f(x)dx=2\int_{-\pi/6}^{7\pi/6}\cos(\frac{7}{2}x+\frac{\pi}{6})dx=2\left[\frac{2}{7}\sin(\frac{7}{2}x+\frac{\pi}{6})\right]_0^{\pi/7} = \left(\frac{4}{7}\sin(\frac{7}{2}\times\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{6})-\frac{4}{7}\sin(\frac{7}{2}\times 0+\frac{\pi}{6})\right)$

$\left(\frac{4}{7}\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})-\frac{4}{7}\sin(\frac{\pi}{6})\right)=\frac{4}{7}\left(\sin(\frac{2\pi}{3})-\sin(\frac{\pi}{6})\right)=\frac{4}{7}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$

Ce résultat signifie que les aires comprises entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x=-\frac{\pi}{6}$

et $x=\frac{7\pi}{6}$, positives et négatives se compensent du fait de la période de la fonction *f*.

5°. $f'(\frac{\pi}{2})=0$ et $f(0)=-\sqrt{2}$. $f(0)=A\cos(0)+B\sin(0)=-\sqrt{2}=A$. $f(x)=A\cos\left(\frac{7}{2}x\right)+B\sin\left(\frac{7}{2}x\right)$

Puisque $f'(x)=-\frac{7A}{2}\sin\frac{7x}{2}+\frac{7B}{2}\cos\frac{7x}{2}$ donc si $f'(\frac{\pi}{2})=0 \Leftrightarrow f'(\frac{\pi}{2})=-\frac{7A}{2}\sin\frac{7\pi}{4}+\frac{7B}{2}\cos\frac{7\pi}{4}=0 \Leftrightarrow$

$-\frac{7A}{2}\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{7B}{2}\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow -\frac{7A}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{7B}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\frac{7A}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{7B}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$

alors $A+B=0$ et $B=-A=\sqrt{2}$ $\quad f(x)=-\sqrt{2}\cos\frac{7x}{2}+\sqrt{2}\sin\frac{7x}{2}$, $x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$

$f(x)=2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\cos\frac{7x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{7x}{2}\right)$ $f(x)=2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\frac{7x}{2}+\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin\frac{7x}{2}\right)$. Donc $f(x)=2\cos\left(\frac{7}{2}x-\frac{3\pi}{4}\right)$

5b. $\frac{7}{2}\cos\left(\frac{7}{2}x-\frac{3\pi}{4}\right)=u'(x)\cos u(x)$ avec $u(x)=\left(\frac{7}{2}x-\frac{3\pi}{4}\right)$. Une primitive de $u'\cos u$ est $\sin u$, donc une primitive

de $\frac{7}{2}\cos\left(\frac{7}{2}x-\frac{3\pi}{4}\right)$ est $\sin\left(\frac{7}{2}x-\frac{3\pi}{4}\right)$, et une primitive de $\cos\left(\frac{7}{2}x-\frac{3\pi}{4}\right)$ est $\frac{2}{7}\sin\left(\frac{7}{2}x-\frac{3\pi}{4}\right)$

$$\frac{1}{\frac{5\pi}{14}-\frac{\pi}{14}}\int_{\pi 14}^{5\pi/14} f(x)dx=\frac{28}{4\pi}\int_{-\pi/14}^{5\pi/14}\cos\left(\frac{7}{2}x-\frac{3\pi}{4}\right)dx=\frac{7}{\pi}\left[\frac{2}{7}\sin\left(\frac{7}{2}x-\frac{3\pi}{4}\right)\right]_{\pi 14}^{5\pi/14}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\sin\left(\frac{7}{2}\times\frac{5\pi}{14}-\frac{3\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{7}{2}\times\frac{\pi}{14}-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)=\frac{2}{\pi}(1+1)=\frac{4}{\pi}\ \text{ et }\ m=\frac{4}{\pi}$$