Equations différentielles 2^{eme} ordre

Corrigé exercice 4

1 . L'équation y'' + y = 0 est une équation différentielle du deuxième ordre sans second membre de la forme

$y''+w^2y=0$ avec $w = 1$. Les solutions sont les fonctions de la forme :

$f(x)=A\cos x+B\sin x$; $A\in\mathbb{R}$; $B\in\mathbb{R}$; $x\in\mathbb{R}$.

2 .

a . La courbe représentative de la fonction *f* passe par le point (0 ; 1) donc *f*(0) = 1, elle admet en ce point une tangente, parallèle à la droite *y* = *x* donc *f* '(0) = 1.

b . On a *f* ' de la forme $f'(x)=-A\sin x+B\cos x$ d'où si $\begin{cases} f(0)=1 \\ f'(0)=1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} A=1 \\ B=1 \end{cases}$

d'où $f(x)=\cos x+\sin x \quad x\in\mathbb{R}$

c . $f(x)=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$x\in\mathbb{R}$

3 . $m=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=$

$\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$m=\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2\pi}=\frac{2}{\pi}$.