Equations différentielles 2^{eme} ordre

Corrigé exercice 5

1-Soit l'équation différentielle : $y''+36y=0$ soit $y''+6^2y=0$. Elle est de la forme : $y''+w^2y=0$ avec $w=6$.
Ses solutions sont les fonctions de la forme : $f(x)=A\cos wx+B\sin wx$; avec $A\in\mathbb{R}$; $B\in\mathbb{R}$; $x\in\mathbb{R}$
et donc ici : $f(x)=A\cos 6x+B\sin 6x$ avec $x\in\mathbb{R}$.
2.- si la courbe de *f* passe par $G(0;\sqrt{3})$ alors $f(0)=\sqrt{3}$
- si la tangente à cette courbe en g a un coefficient directeur égal à 6 alors $f'(0)=6$

Calculons $f'(x)$. $f'(x)=-6A\sin 6x+6B\cos 6x$ donc si $f(0)=\sqrt{3}$ alors $A=\sqrt{3}$ et si $f'(0)=6$ alors
$6B=6$ et donc B = 1 et donc $f(x)=\sqrt{3}\cos 6x+\sin x$
Par conséquent, la solution demandée est : $f(x)=\sqrt{3}\cos 6x+\sin x$
3. D'après la formule sin(a+b)=sin(a)cos(b)+sin(b)cos(a), on déduit :

$$\sin\left(6x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 6x\cos\frac{\pi}{3}+\cos 6x\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\sin 6x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 6x$$ d'où

$$2\sin\left(6x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cos 6x+\sin(6x)$$

par conséquent, $f(x)=2\sin\left(6x+\frac{\pi}{3}\right)$.

4- $$m=\frac{1}{\pi/6-0}\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi/6}\int_0^{\pi}2\sin\left(6x+\frac{\pi}{3}\right)dx=\frac{2}{\pi/6}\left[-\frac{1}{6}\cos\left(6x+\frac{\pi}{6}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=$$

$$\frac{12}{\pi}\left[-\frac{1}{6}\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{6}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right] \quad ; \quad m=\frac{2}{\pi}$$

4b. $$f'(x)=-15\sqrt{2}\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow -15\sqrt{2}\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=15 \Leftrightarrow \sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow 5x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } 5x-\frac{\pi}{4}=\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2k'\pi \text{ ; } k\in\mathbb{Z} \text{ ; } k'\in\mathbb{Z}$$

$$5x=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } 5x=\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2k'\pi \text{ ; } k\in\mathbb{Z} \text{ ; } k'\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 5x=0+2k\pi \text{ ou } 5x=\frac{3\pi}{2}+2k'\pi \text{ ; } k\in\mathbb{Z} \text{ ; } k'\in\mathbb{Z}$$

$$x=\frac{2k\pi}{5} \text{ ou } x=\frac{3\pi}{10}+\frac{2k'\pi}{5} \text{ ; } k\in\mathbb{Z} \text{ ; } k'\in\mathbb{Z} \quad S=\left\{\frac{2k\pi}{5} \text{ ; } \frac{3\pi}{10}+\frac{2k'\pi}{5} \text{ ; } k\in\mathbb{Z} \text{ ; } k'\in\mathbb{Z}\right\}$$

4b. $$f'(x)=-15\sqrt{2}\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow -15\sqrt{2}\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{15\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 5x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \;\; ou \;\; 5x-\frac{\pi}{4}=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k'\pi \; ; \; k\in\mathbb{Z} \; ; k'\in\mathbb{Z}$$

$$5x=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}+2k\pi \;\; ou \;\; 5x=\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}+2k'\pi \;\; ; k\in\mathbb{Z} \; ; k'\in\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow 5x=\frac{\pi}{12}+2k\pi \;\; ou \;\; 5x=\frac{17\pi}{12}+2k'\pi \;\; ; k\in\mathbb{Z} \; ; k'\in\mathbb{Z}$$

$$x=\frac{\pi}{60}+\frac{2k\pi}{5} \;\; ou \;\; x=\frac{17\pi}{60}+\frac{2k'\pi}{5} \;\; ; k\in\mathbb{Z} \;\; ; k'\in\mathbb{Z} \qquad S=\left\{\frac{\pi}{60}+\frac{2k\pi}{5} \; ; \; \frac{17\pi}{60}+\frac{2k'\pi}{5} \; ; \; k\in\mathbb{Z} \; ; \; k'\in\mathbb{Z}\right\}.$$

5.a. . $f'(x)=-5\sin\left[5\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)\right] \quad \Leftrightarrow \quad -5\sin\left[5\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=5\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left[5\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin\left[5\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 5\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \;\; ou \;\; 5\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2k'\pi \; ; \; k\in\mathbb{Z} \; ; \; k'\in\mathbb{Z}$$

$$5x=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+2k\pi \;\; ou \;\; 5x=\pi+\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+2k'\pi \;\; ; k\in\mathbb{Z} \; ; k'\in\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow$$

$$5x=\frac{7\pi}{12}+2k\pi \;\; ou \;\; 5x=\frac{25\pi}{12}+2k'\pi \;\; ; k\in\mathbb{Z} \; ; k'\in\mathbb{Z}$$

$$x=\frac{7\pi}{60}+\frac{2k\pi}{5} \;\; ou \;\; x=\frac{25\pi}{60}+\frac{2k'\pi}{5} \;\; ; k\in\mathbb{Z} \;\; ; k'\in\mathbb{Z}$$

$$S=\left\{\frac{7\pi}{60}+\frac{2k\pi}{5} \; ; \; \frac{5\pi}{12}+\frac{2k'\pi}{5} \; ; \; k\in\mathbb{Z} \; ; \; k'\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$\frac{5\pi}{12}+\frac{2k'\pi}{5}=\frac{25\pi}{60}+\frac{2k'\pi}{5}=\frac{24\pi}{60}+\frac{\pi}{60}+\frac{24k'\pi}{60} \;\; ; k'\in\mathbb{Z} \qquad \frac{25\pi}{60}+\frac{2k\pi}{5}=\frac{\pi}{60}+\frac{24(k'+1)\pi}{60} \;\; ; k'\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{25\pi}{60}+\frac{2k\pi}{5}=\frac{\pi}{60}+\frac{2(k'+1)\pi}{5} \;\; ; k'\in\mathbb{Z} \qquad \frac{5\pi}{12}+\frac{2k'\pi}{5}=\frac{25\pi}{60}+\frac{2k\pi}{5}=\frac{\pi}{60}+\frac{2k''\pi}{5} \;\; ; k''\in\mathbb{Z}$$

$$S=\left\{\frac{7\pi}{60}+\frac{2k\pi}{5} \; ; \; \frac{\pi}{60}+\frac{2k''\pi}{5} \; ; \; k\in\mathbb{Z} \; ; \; k''\in\mathbb{Z}\right\}.$$

b. La dérivée de $x\to\cos(ax+b)$ est $x\to -a\sin(ax+b)$ donc la dérivée $x\to\cos\left[5\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]$ est $x\to -5\sin\left[5\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]$, La dérivée de $x\to\sin(ax+b)$ est $x\to a\cos(ax+b)$.

on peut donc calculer $f''(x)$; $f''(x)=-25\cos\left[5\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

Donc pour tout réel x $f''(x)+25f(x)=-25\cos\left[5\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]+25\cos\left[5\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]=0$

Donc , f est une solution de l'équation différentielle $y''+25y=0$.

4.

a. Déterminer la solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

b. Déterminer la solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f'(x)=15$

c. Déterminer la solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f'(x)=\frac{15\sqrt{2}}{2}$

5. soit la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\cos\left[5\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

a. calculer $f'(x)$ et résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x)=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

b. Vérifier que f est une solution de l'équation (E)