

PROBLEME 18

PARTIE A Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{\ln x}{x} + e$

On note C_g la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour C_g ?
2. Déterminer, à l'aide de la dérivée g' , le sens de variation de g . Dresser le tableau de variation de g .
3. Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation $g(x) = e$.
4. Calculer $g\left(\frac{1}{e}\right)$. En déduire, pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, le signe de $g(x)$.
5. Tracer C_g en indiquant les asymptotes et tangentes horizontales éventuelles. Faire apparaître sur le graphique le résultat de la question 3.

PARTIE B Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + ex - e$. On note C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal. (Unités graphiques : 4 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée).

1. Soit x appartenant à $]0; +\infty[$. Vérifier que $f'(x) = g(x)$.
2. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de f .
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à C_f en son point I d'abscisse 1. Préciser la position de C_f par rapport à (T) .
5. Tracer (T) et C_f .