

PROBLEME 1

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $] -\infty; 1[$ par $h(x) = \ln(1-x)$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$
2. Calculer $h'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $] -\infty; 1[$. En déduire le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $] -\infty; 1[$.
3. a. Calculer $h(0)$ b. Dresser le tableau de variation de la fonction h sur $] -\infty; 1[$.
c) En déduire le signe de h sur $] -\infty; 1[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $] -\infty; 1[$ par : $f(x) = \frac{x + \ln(1-x)}{1-x}$. On désigne par (C_f) la courbe de la fonction f

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. Interpréter graphiquement cette limite. b. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
2. Montrer que $\forall x \in] -\infty; 1[$, $f'(x) = \frac{h(x)}{(1-x)^2}$.
3. Donner les variations de f et dresser son tableau de variation sur $] -\infty; 1[$.
4. Dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, Construire (C_f) . unité graphique : 2 cm

Partie C

On donne la fonction F définie sur $] -\infty; 1[$ par : $F(x) = -\left[x + \ln(1-x) + \frac{1}{2} \ln(1-x)^2 \right]$.

1. Justifie que F est une primitive de la fonction f sur $] -\infty; 1[$.
2. Calculer l'intégrale $I = \int_{-5}^2 f(x) dx$ puis en déduire l'aire A du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses la courbe et les droites d'équations $x = -5$ et $x = 2$ en cm^2

PROBLEME 2 (EXTRAIT BAC BLANC ISTAS 2012)

PARTIE A

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Déterminer D_f
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter les résultats.
3. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $]0; +\infty[$
4. Dresser le Tableau de variation de f
5. Justifier que f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers un intervalle à préciser.
6. Calculer $f(1)$ puis justifier que : $\forall x \in]0; 1[, f(x) < 0$ et $\forall x \in]1; +\infty[, f(x) > 0$

PARTIE B

On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - \ln x + 4$

1. Déterminer les limites aux bornes de D_f
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}$ et interpréter le résultat.
3. Calculer $h'(x)$ et étudier son signe sur $]0; +\infty[$
4. Dresser le Tableau de variation de h
5. Déterminer l'équation de la tangente $(T_{0,5})$ au point d'abscisse 0,5
6. Existe-t-il d'autres points de (C_h) où la tangente est parallèle à la tangente au point d'abscisse 0,5
7. Tracer (C_h) et $(T_{0,5})$ dans le même repère.

PARTIE C

1. Justifier que l'inéquation $h(x) \geq \frac{13}{3}$
2. Justifier que l'équation $h(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]0; +\infty[$
3. On donne, $\forall x \in]0; +\infty[$, $G(x) = \frac{1}{12}x^4 - x \ln x + 3x + 1$. Calculer la fonction dérivée de $G(x)$ sur $]0; +\infty[$
4. Quel constat faites-vous ?
5. Dresser le tableau de variation de $G(x)$

PROBLEME 3 (EXTRAIT DEVOIR COMMUN TLE G2 IST ADAMA SANOGO MARS 2012)

PARTIE A. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 5 + 5 \ln x$.

1. $\forall x \in]0; +\infty[$ Calculer $g'(x)$.
2. Etudier le signe de $g'(x)$ et donner le sens de variation de la fonction $g(x)$
3. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1; 2]$. On note α cette solution.
4. Déterminer le signe de $g(x)$, $\forall x \in]0; +\infty[$

PARTIE B. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{(x-5) \ln x}{x}$.

1. a. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
- b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. a. Soit f' la fonction dérivée de f . Calculer $f'(x)$.

b. Montrer que $f(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ et en déduire le signe de $f'(x)$

c. Dresser le tableau de variation de f .

3. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

a. Soit A le point de la courbe d'abscisse 1. Donner une équation de la droite (D) tangente en A à la courbe (C_f)

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (D) et de l'axe des ordonnées

c. Montrer que $f(\alpha) = \frac{-(\alpha-5)^2}{5\alpha}$ **d.** Tracer la droite (D) et la courbe (C_f)

PARTIE C

1. Soit F la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = x \ln x - x - \frac{5}{2}(\ln x)^2$. Justifier que la fonction $F'(x) = f(x)$

2. a. Hachurer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

b. Calculer la valeur exacte, en cm^2 de $A = -4[F(e) - F(1)]$.

PROBLEME 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

PARTIE A

1. Justifier que l'ensemble de définition D_f de f est $] -\infty; -1[\cup]0; +\infty[$

2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f .

3- a) Démontrer que pour tout nombre réel x élément de D_f , $f'(x) = \frac{-1}{x(x+1)}$

b) En déduire le sens de variation de f sur D_f puis dresser son tableau de variation.

4. Calculer $f(1)$ et $f(4)$

5. Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, I, J) d'unité 2 cm. Soit (C) la courbe représentative de f

a) Démontrer que le point $\Omega\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ est centre de symétrie de (C) **b)** Construire (C).

6- a) Démontrer que la restriction de f à $] -\infty; -1[$ admet une bijection réciproque h .

b) Donner l'ensemble de définition de h et déterminer $h(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'ensemble de définition de h . Dresser le tableau de variation de h

c) Tracer la représentation graphique de h dans le repère précédent.

PARTIE B

Soit la fonction g dérivable et définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \ln|x+1|$

1- Déterminer l'ensemble de définition D_g

2- Calculer $g'(x)$ pour tout réel x appartenant à D_g .

3- Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 4$ donner une valeur approchée du résultat à 10^{-2} près

PROBLEME 5

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $] -\infty; 1[$ par $h(x) = \ln(1-x)$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$
2. Calculer $h'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $] -\infty; 1[$. En déduire le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $] -\infty; 1[$.
3. a. Calculer $h(0)$ b. Dresser le tableau de variation de la fonction h sur $] -\infty; 1[$.
c) En déduire le signe de h sur $] -\infty; 1[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $] -\infty; 1[$ par : $f(x) = \frac{x + \ln(1-x)}{1-x}$. On désigne par (C_f) la courbe de la fonction f

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. Interpréter graphiquement cette limite. b. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
2. Montrer que $\forall x \in] -\infty; 1[$, $f'(x) = \frac{h(x)}{(1+x)^2}$.
3. Donner les variations de f et dresser son tableau de variation sur $] -\infty; 1[$.
4. Dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, Construire (C_f) . unité graphique : 2 cm

PARTIE C

On donne la fonction F définie sur $] -\infty; 1[$ par : $F(x) = -\left[x + \ln(1-x) + \frac{1}{2} \ln(1-x)^2 \right]$.

1. Justifie que F est une primitive de la fonction f sur $] -\infty; 1[$.
2. Calculer l'intégrale $I = \int_{-5}^2 f(x) dx$ puis en déduire l'aire A du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses la courbe et les droites d'équations $x = -5$ et $x = 2$ en cm^2