Problème 6

Partie 1

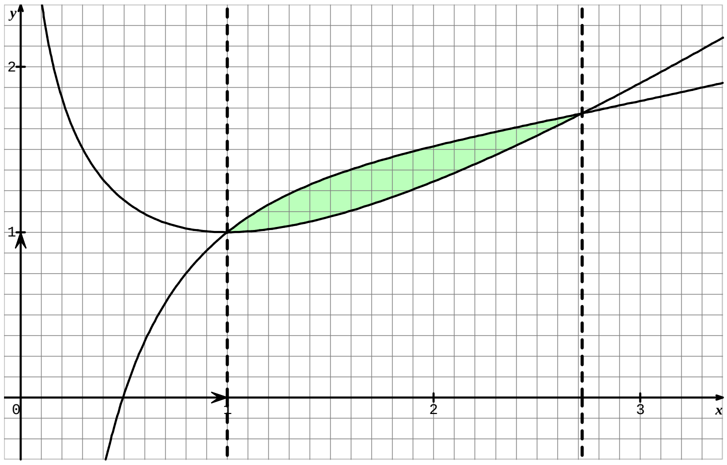
1.a) $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ .donc la courbe C présente une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

b) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$ d'où le tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+\infty$ ↘	0	↗	$3-\ln 3$ $+\infty$

2. $g(x) = x - (\ln x)^2$; $g'(x) = 1 - 2\ln x \times \dfrac{1}{x}$

Partie 2



1.a) $f(x)=g(x)$ $\quad x - \ln x = x - (\ln x)^2$;

$(\ln x)^2 - \ln x = 0$; $\ln x(1-\ln x) = 0$

$\ln x = 0$ ou $\ln x = 1$ $\quad x = 1$ ou $x = e$ .donc

l'équation admet deux solutions : 1 et e sur $]0\,;3[$.

b) Soit M (1 ;1) et N (e ;e-1)

b / voir courbe

2.a) $x - \ln x \geq x - (\ln x)^2$, $\ln x(1-\ln x) \geq 0$

x	0		1		e		3
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-\ln x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\ln x(1-\ln x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $g(x) \geq f(x)$ si $x \in [1;e]$

b) On en déduit que Γ est au dessus de C pour tout $x \in [1;e]$

2.a) $H(x) = -x(\ln x)^2 + 3x\ln x - 3x$. $H'(x) = -(\ln x)^2 - 2x \times \dfrac{1}{x}\ln x + 3\ln x + 3 - 3 = -(\ln x)^2 + \ln x = g(x) - f(x)$

donc H est une primitive de g - f sur [1; e]

b) $\displaystyle\int_1^e (g(x) - f(x))dx = [H(x)]_1^e = H(e) - H(1) = \left(-e(\ln e)^2 + 3e\ln e\right) - (-3) = (-e + 3e - 3e + 3) = (3-e)$ u.a

c) A = 2,817 cm^2 à 10^{-3} près soit A = 2,82 cm^2 au mm^2 près par excès.

Problème 7

A- $g(x) = x^2 + 6 - 4\ln x$; $g'(x) = 2x - \dfrac{4}{x} = \dfrac{2x^2-4}{x}$; $g'(x) = \dfrac{2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x}$. Comme $x \in]0;+\infty[$ $\dfrac{2(x+\sqrt{2})}{x} > 0$

Donc le signe de g'(x) dépend du signe de $x - \sqrt{2}$,

d'où le tableau de variation

La fonction g admet un minimum égal à

g($\sqrt{2}$) = 2+6-4ln$\sqrt{2}$ =8–2ln2.

Par conséquent g(x)> 0 sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$g(\sqrt{2})$	↗	

B- a) $f(x) = \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{\ln x}{x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x}{4}) = \dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to+\infty}(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{\ln x}{x}) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b- $\lim\limits_{x\to0^+}(\dfrac{x}{4}) = \dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to0^+}(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} -\dfrac{1}{2x} = -\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x} \times \lim\limits_{x\to0^+}\ln x$ et $\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x) = -\infty$. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$.

On déduit que la droite d'équation : x = 0 est une asymptote verticale à la courbe C au voisinage de 0.

c- $f'(x) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{x \times \frac{1}{x} - \ln x}{x^2}$; $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2 + 4 - 4\ln x}{4x^2}$; $f'(x) = \dfrac{x^2+6-4\ln x}{4x^2}$ et $f'(x) = \dfrac{g(x)}{4x^2}$.

d-Le signe de f '(x) sur l'intervalle $]0;+\infty[$ dépend du signe e-

de g(x) ; or g(x) =8-2ln2 > 0 pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Il s'ensuit que f '(x) > 0 pour tout $x \in]0;+\infty[$ et par conséquent

la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$7/4$	$+$	
$f(x)$		$-\infty$	↗		$+\infty$

2-a) Soit $h(x)=f(x)-y$; $h(x)=\frac{x}{4}-\frac{1}{2x}+\frac{\ln x}{x}-\frac{x}{4}$.

$h(x)=-\frac{1}{2x}+\frac{\ln x}{x}$ .Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\ln x}{x})=0$ .Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$.

On déduit que la droite Dest une asymptote oblique à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

b- Trouver les coordonnées du point d'intersection des courbes D et C revient à résoudre l'équation $f(x)=y$

c'est-à-dire $f(x)$ - y = 0 ou encore $h(x)$ = 0. donc $\frac{-1+2\ln x}{2x}=0$. $x\neq 0$ et $2\ln x-1=0$.

$\ln x=\frac{1}{2}$ équivaut à $\ln x=(1/2)\ln e=\ln e^{1/2}$ et $x=e^{1/2}=\sqrt{e}$. $y=f(e)=\frac{\sqrt{e}}{4}$. $A(\sqrt{e}\,;\frac{\sqrt{e}}{4})$.

c- Déterminer les positions relative de la courbe C par rapport à la droite D , revient à étudier le signe de $h(x)=f(x)-y$, c'est-à-dire le signe de $\frac{2\ln x-1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$, donc il faut étudier de $2\ln x-1$.

$2\ln x-1>0$; $\ln x>1/2$, $\ln x>1/2=\ln e^{1/2}$,

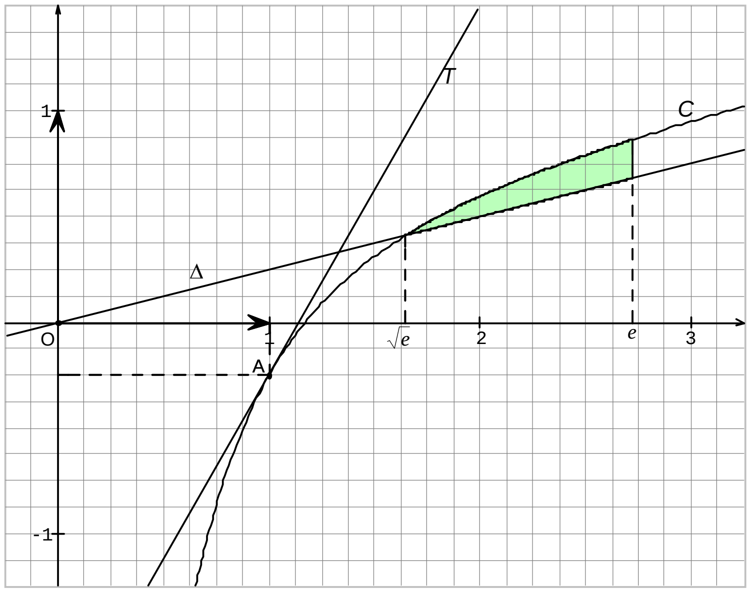
donc $x>e^{1/2}$. On déduit donc que sur l'intervalle $]e^{1/2}\,;+\infty[$ la courbe C est au dessus de la droite D .

On démontre de même que sur l'intervalle $]0\,;e^{1/2}[$ la courbe C est en dessous de la droite D .

4- $\frac{\ln x}{x}$ est de la forme $u'(x)u(x)$ avec u= $\ln x$.

Donc une primitive de $\frac{\ln x}{x}$ est de la forme $\frac{1}{2}u(x)^2$

Donc $H(x)=-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$ sur $]0;+\infty[$.



3- $A=(\int_{\sqrt{e}}^{e}(f(x)-y)dx)\times u.a=16\times(\int_{\sqrt{e}}^{e}(-\frac{1}{2x}+\frac{\ln x}{x})dx)$ $A=16\times\left[H(e)-H(\sqrt{e})\right]$. $H(e)=-\frac{1}{2}\ln e+\frac{1}{2}(\ln e)^2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$

et $H(\sqrt{e})=\frac{-1}{2}\ln\sqrt{e}+\frac{1}{2}(\ln\sqrt{e})^2=\frac{-1}{4}\ln e+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln e\right)^2=-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=-\frac{1}{8}$. On déduit que $A=16\times\left(0-\left(-\frac{1}{8}\right)\right)=16\left(\frac{1}{8}\right)=2cm^2$.

Problème 9

Partie A

1. $g(x)=-2x^2-1+\ln x$, $g'(x)=-4x+\frac{1}{x}=\frac{1-4x^2}{x}=\frac{(1-2x)(1+2x)}{x}$. Sur]0 ; $+\infty$ [seul le terme $1-2x$ change de signe : positif avant 1/2, négatif après 1/2.

2.

x	0	1/2	$+\infty$
$g'(x)$	+		−
$g(x)$	↗	$-\frac{3}{2}-\ln 2$	↘

3. Le maximum de g est $-\frac{3}{2}-\ln 2$ donc $g(x)\leq g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}-\ln 2<0$.

Partie B

1. a. $f(x)=-x+1-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}$: $\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\ln x$; or en 0 $\ln x$ tend vers $-\infty$ et $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$.

Conclusion, f tend vers $+\infty$. quand x tend vers 0 ; la droite x = 0 est asymptote de C.

b. On sait que $\frac{\ln x}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ donc f tend vers $-\infty$ car $-x+1$ tend vers $-\infty$.

c. $f(x)-(-x+1)=-x+1-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}+x-1=-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ donc la droite Δ : $y=-x+1$ est asymptote à la courbe

d. Lorsque $x>1$, $-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}<0$ car $\ln x>0$ .Donc sur $[1;+\infty[$ C est au-dessus de Δ ; sur $]0\,;1]$ C est en dessous de Δ.

2. a. b. c. $f'(x)=-1-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{-2x^2-1+\ln x}{2x^2}=\frac{g(x)}{2x^2}$. Donc f ’ est négative et f décroissante.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

d. $f(1) = 0$: lorsque x est inférieur à 1, $f(x)>f(1)=0$ car f est décroissante. Lorsque x est supérieur à 1, $f(x)<f(1)=0$.

3. courbe

Partie C

1. $F'(x)=-\frac{1}{2}(2x)+1-\frac{1}{4}\left(2\frac{1}{x}\ln x\right)=-x+1-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}=f(x)$: F est une primitive de f.

2. $I=\int_1^e f(x)\,dx=F(e)-F(1)=\left[-\frac{1}{2}e^2+e-\frac{1}{4}(\ln e)^2\right]-\left[-\frac{1}{2}1^2+1-\frac{1}{4}(\ln 1)^2\right]=-\frac{1}{2}e^2+e-\frac{3}{4}\approx -1{,}726$.

3. b. L’unité d’aire est $1\text{ cm}\times 2\text{ cm}=2\text{ cm}^2$; on prend la valeur absolue de l’intégrale multipliée par l’unité d’aire, ce qui nous fait $e^2-2e+\frac{3}{2}$, soit environ 3,45 cm^2 au mm^2 près.

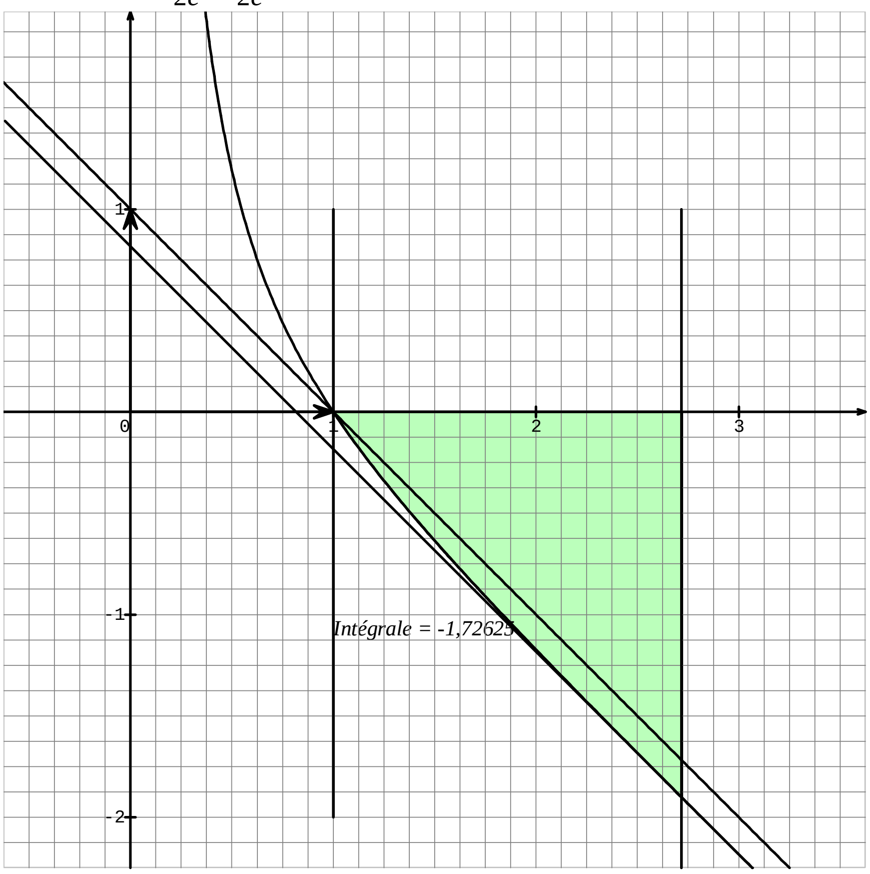
Partie D

1. Pour avoir une tangente parallèle à Δ, il faut trouver x tel que $f'(x)=-1$, soit $\frac{-2x^2-1+\ln x}{2x^2}=-1$.

$\Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$ L’ordonnée est alors $f(e)=-e+1-\frac{1}{2e}$; l’équation de T est $y=-x+e-e+1-\frac{1}{2e}=-x+1-\frac{1}{2e}$.

2. a. Comme C est en dessous de Δ, on a $MN=(-x+1)-f(x)=\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}=h(x)$.

b. $h'(x)=\frac{1}{2}\frac{1-\ln x}{x^2}$ qui change de signe en $x=e$; la distance MN est maximale lorsque M est en J et cette distance vaut $h(e)=\frac{\ln e}{2e}=\frac{1}{2e}$.



Problème 10

La fonction g est définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = -x + \ln x$.

1. $g(x) = 0 \Leftrightarrow -x + x\ln x = 0 \Leftrightarrow x(-1+\ln x) = 0 \Leftrightarrow -1+\ln x = 0 \; puisque \; x \neq 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$.
2. $g(x) > 0 \Leftrightarrow -x + x\ln x > 0 \Leftrightarrow x(-1+\ln x) > 0 \Leftrightarrow -1+\ln x > 0 \; puisque \; x > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$

PARTIE II

La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$

1 $f(x) = x^2(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln x)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln x) = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

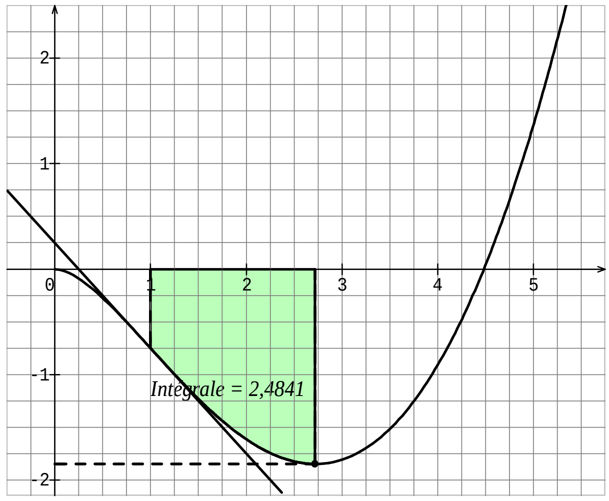
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{-3}{4}x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}x^2 \ln x = 0$ donc : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

$f'(x) = -\frac{3}{2}x + x\ln x + \frac{1}{2}x^2.\frac{1}{x}$. $f'(x) = -\frac{3}{2}x + x\ln x + \frac{1}{2}x$

$f'(x) = -x + x\ln x$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↘	$f(e) = -\frac{1}{4}e^2$	↗ $+\infty$

2. d'où f'(x) = g(x). f'(x) est donc du signe de g(x).
   Il en résulte le tableau de variation suivant :



3. $f(e^{3/2}) = -\frac{3}{4}e^3 + \frac{1}{2}e^3 \ln e^{3/2}$ $\quad f(e^{3/2}) = -\frac{3}{4}e^3 + \frac{3}{4}e^3 = 0$

   d'où : $f(e^{3/2}) = 0$

4.L'équation de la tangente (T) en A à la courbe (G) est :
$y - f(1) = f'(1)(x-1)$ avec $f(1) = -3/4$ et $f'(1) = -1$ .On a donc : $y + 3/4 = -(-x-1)$ $\quad y = -x + 1 + 3/4$ $\quad y = -x + 1/4$

5.Tableau de valeurs :

x	0,5	1	2	3	4	5	6
f(x)	-0,27	-0,75	-1,6	-1,8	-0,9	1,4	5,2

Voir courbe ci-contre :

6.a. $F(x) = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{11}{36}x^3$. Pour montrer que F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$, il suffit de montrer que $F'(x) = f(x)$.

On a : $F'(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{6}x^3.\frac{1}{x} - \frac{11}{12}x^2$; $F'(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{11}{12}x^2$; $F'(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2$.

Donc F est bien une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

b. $-\int_1^e f(x)dx$ car G est située en dessous de l'axe des abscisses

$[-F(x)]_1^e = F(1) - F(e) = -\frac{11}{36} - \left(\frac{1}{6}e^3 - \frac{11}{36}e^3\right) = \frac{5e^3 - 11}{36} \times 4 = \frac{5e^3 - 11}{9} cm^2$ =9,94 cm² à 0.01 près.