PROBLEME 4

Sur la feuille annexe,qui doit être remise avec la copie, on donne, dans le plan muni d'un repère
orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$la courbe représentative $\boldsymbol{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

Partie A : détermination de la fonction f

On suppose que la courbe passe par le point A de coordonnées $\left(3;-\frac{7}{2}+3\ln 2\right)$.La droite D d'équation x = 2 est une asymptote verticale à la courbe $\boldsymbol{C}_f$. On note $f\,'$la fonction dérivée de f .

1. Quelle est la valeur exacte de f (3) ?
2. Donner sans justification la limite de la fonction f en 2.
3. On suppose que, pour tout réel x de l'intervalle $]2;+\infty[$,
$f(x) = ax - 5 + 3\ln(x-1) - 3\ln(x-2)$
   En utilisant la réponse de la question 1, déterminer algébriquement le nombre a.

Partie B: étude de la fonction f

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $]2;+\infty[$ par :

$f(x) = \frac{1}{2}x - 5 + 3\ln(x-1) - 3\ln(x-2)$

1. a. Retrouver par le calcul la limite de la fonction f en 2.
   b. Montrer que, pour tout x réel de l'intervalle$]2;+\infty[$ $f(x) = \frac{1}{2}x - 5 + 3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$
   c. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}x - 5$ est une asymptote oblique à la courbe$\boldsymbol{C}_f$ en $+\infty$. Tracer Δ sur la feuille annexe.
3. a. Calculer $f\,'(x)$ et montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]2;+\infty[$
$f\,'(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{2(x-1)(x-2)}$
   b. étudier le signe de $f\,'(x)$ sur l'intervalle $]2;+\infty[$.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]2;+\infty[$.
4. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$admet une solution uniqueα dans l'intervalle $[2{,}1;3]$et une solution
   unique β dans l'intervalle $[9;10]$.
   b. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1}de chacune des solutions α et β

Partie C : calcul d'aire

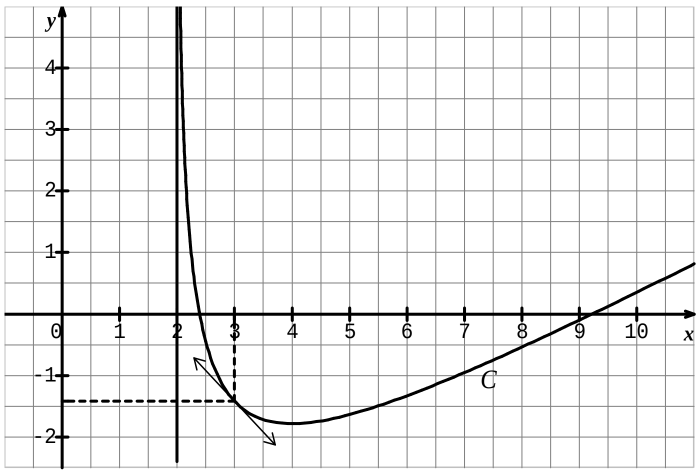
1. On considère les fonctions h et H définies sur l'intervalle $]2;+\infty[$ par

$h(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$ et

$H(x) = (x-1)\ln(x-1) - (x-1)\ln(x-2)$.

a. Montrer que la fonction H est une primitive de la fonction h sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

b. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]2;+\infty[$.



2. On considère le domaine D du plan compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation x =3 et x = 9.

a. Hachurer le domaine D sur le graphique de la feuille annexe.

b. On note A la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine D. Exprimer A sous la forme d'une intégrale.

c. Calculer la valeur exacte de A, puis en donner une valeur approchée à 10^{-1} près.