Problème 12

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire g

1. $g'(x)=\dfrac{1}{x}-4x=\dfrac{1-4x^2}{x}=\dfrac{(1-2x)(1+2x)}{x}$. Pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $x>0$ et $1+2x>0$.

   Donc, $g'(x)$ est du signe de $1-2x$ sur $]0;+\infty[$. Or, $1-2x>0$ si $x<\dfrac{1}{2}$. D'où : $g'(x)$ est positive si x appartient à l'intervalle $]0;1/2[$ et $g'(x)$ est négative si x appartient à l'intervalle $]1/2;+\infty[$

On en déduit alors que la fonction g est croissante sur $]0;1/2[$ et décroissante sur $]1/2;+\infty[$.

Tableau de variations de la fonction **g :**

$g(1/2)=\ln(1/2)-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-1=-\ln 2-3/2$

x	0	$1/2$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	$-\ln 2-3/2$	$\searrow$

2. De la question précédente, en on déduit que la fonction g admet un maximum atteint en $1/2$ et ce maximum est strictement négatif.
   On en déduit alors que la fonction g est négative sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie B : Etude d'une fonction f

1. a) Limite de f en $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)=-\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, donc par soustraction des limites on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-2x-\dfrac{\ln x}{x}\right)=-\infty$.

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

1. b) Limite de f en 0 :

$\lim\limits_{x\to0^+}(1-2x)=1$ $\quad\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}\times\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=(+\infty)(-\infty)=-\infty$, D'où, par addition des limites, on en conclut que : $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1-2x-\dfrac{\ln x}{x}\right)=1-(-\infty)=+\infty$. D'où $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$

2. a) Montrons que la droite $\mathcal{D}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$:

On a : $f(x)-(1-2x)=-\dfrac{\ln x}{x}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$. Donc : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(f(x)-(1-2x)\right)=0$. On en déduit alors que la droite $\mathcal{D}$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.

2. b) Position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$:

   Etudions le signe de $f(x)-(1-2x)$, c'est-à-dire le signe de $-\dfrac{\ln x}{x}$.

   Pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $x>0$. $-\dfrac{\ln x}{x}$ est donc du signe de $-\ln x$ sur $]0;+\infty[$.

   Or, $\ln x\geq 0$ si $x\geq 1$; et $\ln x\leq 0$ si $0<x\leq 1$. Donc : $f(x)-(1-2x)\geq 0$ si $0<x\leq 1$ et $f(x)-(1-2x)\leq 0$ si $x\geq 1$

   D'où : $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite $\mathcal{D}$ sur $]0; 1]$ et $\mathcal{C}$ est en-dessous de la droite $\mathcal{D}$ sur $[1; +\infty[$

3. a) Pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a : $f'(x)=-2-\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\dfrac{-2x^2-1+\ln x}{x^2}=\dfrac{g(x)}{x^2}$

3. b) Signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$:

   Pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$; $x^2>0$. $f'(x)$ est donc du signe de g(x) sur $]0;+\infty[$.

   Or, d'après la question A.2, on sait que $g(x)$ est négative sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

   On en conclut que $f'(x)$ est négative sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

   La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$		$+\infty$ $\searrow$	$-\infty$

4. cf graphique

Partie C : Calcul d'une aire

1. Pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$: $h'(x)=\dfrac{1}{2}\times 2\ln x\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{\ln x}{x}$

2. a) cf graphique

2. b) Sur [1; e], la droite D est au-dessus de la courbe C, on a donc :

$$A=\left(\int_1^e (y-f(x))dx\right)\times u.a=\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=[h(x)]_1^e\times u.a=(h(e)-h(1))\times u.a=\left(\frac{1}{2}(\ln e)^2-\frac{1}{2}(\ln 1)^2\right)u.a=\frac{1}{2}\times 2^2=2cm^2$$

Problème 13

A 1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\ln x)=1-\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)=1-\infty=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+\ln x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\ln x)\times\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=(-\infty)\times+\infty=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$. on peut en déduire en passant que la droite d'équation x = 0 est asymptote à C.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ .On peut en déduire que la droite d'équation $y=0$ est asymptote en $+\infty$

2. a. f est dérivable sur]0 ; + ∞ [et pour tout réel $x\in]0;+\infty[$ on a : $f'(x)=\frac{(1/x)\times x-1\times(1+\ln x)}{x^2}=\frac{1-\ln x-1}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2}$

2.b. f '(x) est du signe de $-\ln x$ car $x^2>0$ sur]0 ; + ∞ [$-\ln x>0$ si et seulement si ln x < 0 si et seulement si 0 < x <1. on en déduit que sur l'intervalle]0 ; 1] , f '(x) >0 donc f croissante sur l'intervalle [1 ; + ∞ [, f '(x) < 0 donc f décroissante .

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	$-$	
$f(x)$		$-\infty$ ↗	1	↘	0

2. c . $f(1)=\frac{1+\ln 1}{1}=1$

Partie B **:**

1. Le point M_1 a pour ordonnées 0 donc son abscisse est solution de l'équation f(x) = 0 :

$f(x)=0\Leftrightarrow 1+\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=-1\Leftrightarrow x=e^{-1}=1/e$

2. a. coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x_2 : $f'\left(1/\sqrt{e}\right)=\frac{-\ln\left(1/\sqrt{e}\right)}{\left(1/\sqrt{e}\right)^2}=\frac{\ln\left(\sqrt{e}\right)}{1/e}=\frac{e}{2}$.

ordonnée du point au point d'abscisse x_2 : $f\left(1/\sqrt{e}\right)=\frac{1+\ln\left(1/\sqrt{e}\right)}{1/\sqrt{e}}=\frac{1-1/2}{1/\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}}{2}\Leftrightarrow x_2=\frac{\sqrt{e}}{2}$.

T : $y=f'\left(1/\sqrt{e}\right)\left(x-1/\sqrt{e}\right)+f\left(1/\sqrt{e}\right)=(e/2)\frac{e}{2}\left(x-1/\sqrt{e}\right)+1/\sqrt{e}=(e/2)x-1/\sqrt{e}+1/\sqrt{e}=(e/2)x$

La tangente T_2 au point M_2 a pour équation : $y=\frac{e}{2}x$.

b. c'est bien l'équation d'une droite passant par l'origine du repère.

3. la tangente au point M_3 d'abscisse x_3 est parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur est nul donc $f'(x_3)=0$ on en déduit $x_3=1$et M_3 (1 ; 1)

4. $f'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$. $f''(x)=\frac{(-1/x)\times x^2+2x\times(1+\ln x)}{x^4}=\frac{x-2\ln x}{x^3}=-\frac{2\ln x-1}{x^3}$

$f''(x)=0\Leftrightarrow-\frac{2\ln x-1}{x^3}=0\Leftrightarrow 2\ln x-1\Leftrightarrow \ln x^2=\ln e\Leftrightarrow x_4=\sqrt{e}$

5. $x_1=1/e$; $x_2=\frac{\sqrt{e}}{2}$; $x_3=1$ et $x_4=\sqrt{e}$. $\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_3}{x_2}=\frac{x_4}{x_3}=\sqrt{e}$

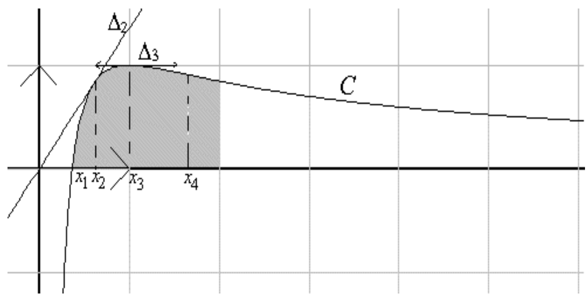
Donc x_1, x_2, x_3 , x_4 sont les quatre termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\sqrt{e}$.

$A=\int_{1/e}^{2} f(x)dx=[F(x)]_{1/e}^{2}=F(2)-F(1/e)$

6. $=\ln 2+\frac{1}{2}(\ln 2)^2-\left(\ln(1/e)+\frac{1}{2}(\ln(1/e))^2\right)$

$=\ln 2+\frac{1}{2}(\ln 2)^2-\left(-1+\frac{1}{2}\right)$

$A=\ln 2+\frac{1}{2}(\ln 2)^2+\frac{1}{2}$



Partie C :

1. g est dérivable sur]0 ; + ∞ [et pour tout réel x de]0 ; + ∞ [on a : $g(x)=(\ln x)^2$ $g'(x)=2\frac{\ln x}{x}$.

$f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x} \quad F(x)=\ln x+\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$

Problème 14

A. Etude d'une fonction auxiliaire

1) $g(x)=x^2+1-2\ln x, \quad x\in R^{*+}$; $\quad g'(x)=2x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2-2}{x}$

si $x \in]\,0\,;\,1]$ alors $g'(x) < 0$, d'où le tableau de variation

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	$\searrow$	2	$\nearrow$	

2) Pour tout $x \in R^{*+}$, $g(x) > 2$ d'où $g(x) > 0$

B. Etude de f et tracé de la courbe C.

1)a) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}-2\dfrac{\ln x}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to0^+} x=0$; $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}\times\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=(+\infty)(-\infty)=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$.

donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe C.

c) $f'(x)=\dfrac{\left(2x-\dfrac{2}{x}\right)x-\left(x^2+1+2\ln x\right)}{x^2}=\dfrac{x^2+1-2\ln x}{x^2}=\dfrac{g'(x)}{x^2}$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

2)a) $f(x)-x=\dfrac{1}{x}+2\dfrac{\ln x}{x}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$. donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe C lorsque x tend vers $+\infty$

b) $f(x) = x$ si et seulement si $\dfrac{1+2\ln x}{x}=0$. $x \in R^{*+}$ si et seulement si $\ln x=-1/2$ si et seulement si $x=e^{-1/2}$ c) Si $x>e^{-1/2}$ alors $f(x)-x>0$ donc si $x\in]0\,;e^{-1/2}[$ alors C est au dessous de Δ.

3) a) $x_B = 1$.

L'équation de la tangente T en B sera $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$. $\quad y - 2 = 2(x - 1)$ $\quad$. $y = 2x$

b) Le coefficient directeur de T' doit être égal à 1.

On cherche à résoudre $f'(x) = 1$ soit $\dfrac{x^2+1-2\ln x}{x^2}=1$ $\quad x \in R^{*+}$ d'où $1 - 2\ln x = 0$. $\ln x=\dfrac{1}{2}$; $\quad x=e^{1/2}$

4) a) $f(e)=\dfrac{e^2+1+2}{e}=\dfrac{e^2+3}{e}$

b) $x_A=e^{-1/2}$, $x_A=e^0=1$, $x_A=e^{1/2}$, $x_A=e$ Suite géométrique de raison $q=e^{1/2}$

C. 1) $H(x) = (\ln x)^2$. $\quad H'(x)=2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x=\dfrac{2\ln x}{x}=h(x)$

2) Soit $I=\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e}(f(x)-x)dx=\int_{\sqrt{e}}^{e}\left(\frac{1}{x}+2\frac{\ln x}{x}\right)dx=\left[\ln x+(\ln x)^2\right]_{\sqrt{e}}^{e}=\ln e+(\ln e)^2-\ln e^{-1/2}-\left(\ln e^{-1/2}\right)^2=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$

L'unité d'aire = 4 cm^2 donc l'aire cherchée est 9 cm^2.

Problème 15

1.a. On a g(2) = 0.

b. T est tangente à C au point d'abscisse 2 donc $g'(2)$ est égal au coefficient directeur de T.

Graphiquement on lit ce coefficient : $\dfrac{3}{2}$ donc $g'(2)=\dfrac{3}{2}$.

c. Si D est asymptote à C lorsque x tend vers $+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$

d. On obtient graphiquement : si $x\in]1;2[$ alors $g(x)<0$; si $x\in[2;+\infty[$ alors $g(x)\geq 0$. D'où

x	1		2		$+\infty$
Signe de $g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

2.a. $g_1(2) = 1-\dfrac{1}{2-1}=0 \quad g_2(2)=1-\dfrac{2}{4-2}=0$.

$g_3(2) = \ln(2 - 1) = 0$. On ne peut donc éliminer aucune fonction.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} g_1(x)=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2-x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_2(x)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-1)=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} g_2(x)=+\infty$. On peut donc éliminer la fonction g_3 .

c. $g_1'(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$, donc $g_1'(2)=\dfrac{1}{2-1}=1$ $g_2'(x)=\dfrac{2(2x-1)}{(x^2-x)^2}$ $g_1'(2)=\dfrac{2(4-1)}{(4-2)^2}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

Il s'agit donc de la fonction g_2 .

Partie B

1.a. $f(x)=x+1+2\ln x-2\ln(x-1)$ $x\in]1;+\infty[$. On sait que : $\ln a-\ln b=\ln\dfrac{a}{b}$ donc $f(x)=x+1+2\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

b. $\lim\limits_{x\to1^+} x-1=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-1)=-\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$. donc la droite $x=1$ est asymptote verticale à la courbe.

2.a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x}{x-1}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b. On a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x}{x-1}=0$,donc la droite d'équation $y=x+1$ est asymptote à la courbe lorsque x tend vers $+\infty$.

c. Si $x\in]1;+\infty[$ alors $x-1>0$, $x>1$ et $x>x-1>0$ donc $\dfrac{x}{x-1}>1$; si $\dfrac{x}{x-1}>1$ alors $\ln\dfrac{x}{x-1}>0$

donc $\ln\dfrac{x}{x-1}>0$ pour tout $x\in]1;+\infty[$. et par conséquent C est au dessus de Δ pour tout $x\in]1;+\infty[$

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$ 0 $+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$ $3+2\ln 2$ $\nearrow$	$+\infty$

3.a. $f'(x)=1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{(x-1)}$ $f'(x)=1+\dfrac{2(x-1)-2x}{x(x-1)}$,donc

$f'(x)=1-\dfrac{2}{x(x-1)}=g_2(x)$.

b. On a vu précédemment le signe de g_2 .On a donc:

Partie C

1. On a $H'(x)=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}-[\ln(x-1)+(x-1)\times\dfrac{1}{x-1}]$. $H'(x)=\ln x+1-[\ln(x-1)+1]$;

$H'(x)=\ln x+1-\ln(x-1)-1$ $H'(x)=\ln x-\ln(x-1)=h(x)$. Donc H est une primitive de h sur] 1 ; +∞ [.

2.a. voir graphique

b. $A=\left(\int_2^3 (f(x)-(x+1))dx\right)u.a=\left(\int_2^3 2\ln\dfrac{x}{x-1}dx\right)u.a=\left(\int_2^3 h(x)dx\right)u.a$

$A=\left[h(x)\right]_2^3$ $A=2\left[(3\ln 3-2\ln 2)-2\ln 2\right]$ **et** $A=2\left[3\ln 3-4\ln 2\right]u.a$ **= 1,08 u.a.**