Problème 12

PARTIE A

La fonction g est définie, sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}\,;+\infty\right[$, par : $g(x)=\frac{2x}{e}-1-\ln x$

1. (a) Calculer $g'(x)$, où g' désigne la fonction dérivée de g.
   Etudier son signe et en déduire le sens de variation de g.

(b) Calculer la limite de g lorsque x tend vers $+\infty$. (On pourra écrire : $g(x)=x\left(\frac{2}{e}-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)$

(c) Calculer $g(1/e)$ et $g(e/2)$.

(d) Dresser le tableau de variation de g.

2. (a) Calculer $g(e)$ et justifier que $g(x)\geq 0$ pour $x\geq e$.

{b) Montrer que g s'annule sur l'intervalle $[\frac{1}{e};\frac{e}{2}]$ pour une valeur unique que l'on notera α.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

3. Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unités graphiques: 2 cm sur l'axe des abscisses, 4 cm sur l'axe des ordonnées).

(a) Tracer la courbe représentative C_g de la fonction g. Placer, en particulier, les points d'abscisses α et e.

(b) Résoudre graphiquement l'inéquation: $g(x)\geq 0$.

PARTIE B

La fonction f est définie. sur $[1/e\,;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x^2}{e}-x\ln x$

1. Vérifier que $f'(x)=g(x)$. En déduire le tableau de variation de f.
2. Justifier que f est positive ou nulle sur l'intervalle $[1/e\,;+\infty[$.

PROBLEME 13

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=\ln x-2x^2-1$

(où ln désigne le logarithme népérien).

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\,]0\,;+\infty[$. Etudier son signe sur $]0;+\infty[$.
2. Etudier le sens de variation de la fonction g (on ne demande pas les limites en 0 et en $+\infty$).
3. En déduire pour tout $x\in\,]0\,;+\infty[$ le signe de $g(x)$.

Partie B

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=-2x+1-\frac{\ln x}{x}$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique : 2 cm .

1. Calculer $f(1)$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?
3. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
4. Démontrer que la droite Δ d'équation $y=-2x+1$ est asymptote à la courbe C.
5. Etudier la position relative de C et Δ sur $]0\,;+\infty[$
6. Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\,]0\,;+\infty[$. f' est la fonction dérivée de la fonction f
   Vérifier que pour tout x de $]0\,;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.Déduire de la partie A le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.
7. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C au point d'abscisse 1.
8. Tracer C , (T) et les asymptotes à la courbe C dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Partie C :

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$

1. On désigne par h' la fonction dérivée de la fonction h . Calculer $h'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
3. Hachurer sur le graphique la partie E du plan limitée par la courbe C , l'axe des abscisses

et le droites (d_1) et (d_2) d'équations : $(d_1): x = 1 \quad et \quad (d_2): x = e$.

4. Calculer la valeur exacte A de l'aire de ce domaine exprimée en cm².Donner la valeur exacte .

PROBLEME 14

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$

et on note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique : 5 cm)

Partie A : Etude de la fonction *f*.

1. Etudier les limites de *f* en 0 et en + ∞ (pour cette dernière on pourra remarquer que : $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$)

2. a. Montrer que : $f'(x) = \dfrac{-\ln x}{x^2}$ pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$

b. En déduire le sens de variation de *f* . Dresser le tableau de variation de *f*.

Partie B : Etude de quelques points particuliers de C

1. Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection M_1 de C avec l'axe des abscisses.

2. Soit $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. On note M_2 le point de C d'abscisse x_2.

Déterminer une équation de la tangente Δ_2 au point M_2. vérifier que Δ_2 passe par O.

3. Indiquer l'abscisse x_3 du point M_3 de C tel que la tangente Δ_3 à C en M_3 soit parallèle à l'axe des abscisses.

4. Soit *f* " la fonction dérivée de *f* ' : calculer *f* "(x) pour x appartenant à $]0;+\infty[$.

Déterminer le réel x_4 qui annule *f* "(x) . On appelle M_4 le point de C d'abscisse x_4.

5. Vérifier que x_1, x_2, x_3 , x_4 sont quatre termes consécutifs d'une suite géométrique dont on indiquera la raison.

6. Placer les points M_1, M_2, M_3 , M_4 dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. Construire les tangentes Δ_2 et Δ_3 puis la courbe C.

Partie C : Calcul d'une aire

1. On note *g* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = (\ln x)^2$. Calculer la dérivée de *g*.

En déduire une primitive de *f* sur $]0;+\infty[$,après avoir remarqué que : $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$

2. Hachurer le domaine plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation

$x = \dfrac{1}{e}$ et $x = 2$. Calculer la valeur exacte A de l'aire de ce domaine exprimée en cm².

Problème 15

Le but du problème est d'étudier la fonction *f* définie sur $]0.+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+1+2\ln x}{x}$ .On note **C**

sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

A. Etude d'une fonction auxiliaire

On introduit la fonction g définie sur $]0.+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

1) Etudier les variations de g (on ne demande pas la recherche de limites).

2) En déduire le signe de g sur l'intervalle $]0.+\infty[$.

B. Etude de *f* et trace de la courbe C.

1)a) Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de *f* en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe **C**.

c) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout *x* de $]0.+\infty[$ $\quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$. En déduire le signe de *f'*(*x*)

2) a) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe **C**.

b) Déterminer l'abscisse x_A du point A, intersection de la courbe **C** et de la droite Δ

c) Etudier la position relative de **C** et Δ.

3) a) Déterminer la tangente T à C au point d'abscisse $x_B = 1$.

b) Déterminer l'abscisse x_C du point où la courbe admet une tangente T' parallèle à la droite Δ.

4)a) Calculer l'ordonnée du point D de C d'abscisse $x_D = e$.

b) Montrer que les abscisses x_A, x_B, x_C et x_D des points A, B, C et D sont les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

Placer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les points A, B, C et D. Tracer les droites Δ, T, T' puis la courbe **C**.

C. CALCUL D'UNE AIRE

1) Calculer la dérivé h de la fonction H définie sur $]0.+\infty[$ par H(x) = (ln x)^2.

2) Calculer en cm2, l'aire du domaine plan limité par la courbe C, la droite D et les droites d'équation $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ et x = e.