

Problème 26

Partie A $f(x) = x^2 + ax + b - 2\ln x$

Déterminons les valeurs de a et de b tels que la courbe C d'équation $y=f(x)$ passe par $A(1;-3)$ et que la tangente à C en A soit parallèle à l'axe Ox .

On doit avoir : $f(1) = -3$ et $f'(1) = 0$. Or $f'(x) = 2x + a - \frac{2}{x}$

On en déduit : $f(1) = 1 + a + b - 2\ln 1 = a + b - 1 = -3$ donc : $a + b = -4$ $f'(1) = 2 + a - \frac{2}{1} = a = 0$

donc : $a = 0$ et $b = -4$. La fonction f cherchée est donc définie par : $f(x) = x^2 - 4 - 2\ln x$.

Partie B

1.a) On a clairement : $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 4) = -4$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

On en déduit que la droite d'équation : $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe au voisinage de 0 (l'axe Oy est asymptote à C).

2.a) Vérifier pour $x > 0$: $f(x) = x \left(x - \frac{4}{x} - \frac{2\ln x}{x} \right)$. C'est évident !

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{4}{x} - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. On peut écrire : $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}$.

Signe de $f'(x)$. Tableau de variation de f .

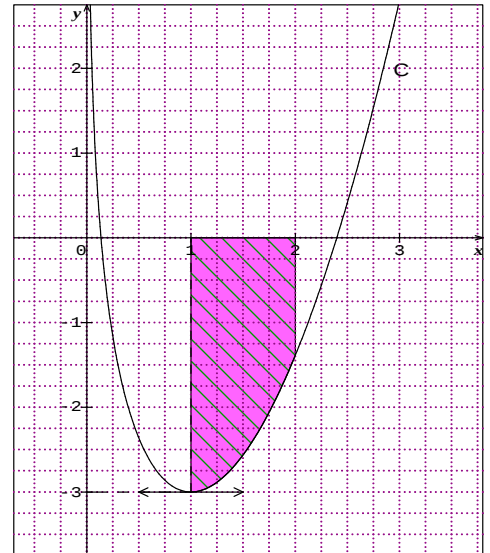
x	0	1	$+\infty$
$x-1$	—	0	+
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-3	↗ $+\infty$

4. Signe de $f(x)$ lorsque $x \in [1; 2]$.

On sait que $f(1) = -3$. Par ailleurs $f(2) = 2^2 - 4 - 2\ln 2 = -2\ln 2$.

Donc $f(2) < 0$. La fonction f étant dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $[1; 2]$ on en déduit qu'elle est strictement négative sur cet intervalle.

5. Courbe C .



Partie C. Calcul de $H'(x)$. On a : $H(x) = x \ln x - x$. Donc : $H'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

En déduire une primitive de f sur I . Une primitive de f sur I est définie par :

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 4x - 2(x \ln x - x) \text{ ou encore : } F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x - 2x \ln x$$

Calcul de l'aire de Δ . La fonction f étant négative sur l'intervalle $[1; 2]$,

L'unité d'aire vaut 4 cm^2 Donc on peut écrire que cette aire est donnée

$$\text{par : } \text{Aire}(\Delta) = 4 \times \left(-\int_1^2 f(x) dx \right) = 4 \times [-F(x)]_1^2 = 4 \times [F(1) - F(2)] \text{ Donc : } F(1) = \frac{1}{3} - 2 - 2\ln 1 = -\frac{5}{3} \text{ et}$$

$$F(2) = \frac{8}{3} - 4 - 4\ln 2, \text{ donc } \text{Aire}(\Delta) = 4 \times [F(1) - F(2)] = 4 \times \left(-\frac{5}{3} - \frac{8}{3} + 4 + 4\ln 2 \right) = 4 \left(4\ln 2 - \frac{1}{3} \right)$$

$$\text{Aire}(\Delta) = 16\ln 2 - \frac{4}{3} \approx 9,75 \text{ cm}^2.$$

Problème 27

1.a. $2x^2 - 5x + 2 = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 2 \times 2 = 25 - 16 = 9$; $x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{5+3}{4} = 2$. $S = \{1/2; 2\}$

1.b sur l'intervalle $]0; +\infty[$, résolvons l'équation $2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 = 0$. Posons $X = \ln x$. L'équation devient

$$2X^2 - 5X + 2 = 0. \text{ On a vu que } X = 1/2 \text{ ou } X = 2. \ln x_1 = 1/2 \Leftrightarrow x_1 = e^{1/2} = \sqrt{e}; \ln x_1 = 2 \Leftrightarrow x_1 = e^2$$

Partie B

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2$

1.a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2)$ or $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ d'où $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2(\ln x)^2 = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -5\ln x = +\infty$

Donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$. La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x (2(\ln x) - 5) + 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2(\ln x) - 5) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3.a f est dérivable sur $]0; +\infty[$; $f(x) = 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2$ $f'(x) = 2 \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x - 5 \times \frac{1}{x} = \frac{4\ln x}{x} - \frac{5}{x}$.

(car $(u^2)' = 2u'u$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$) pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{4\ln x - 5}{x}$.

3.b variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{4\ln x - 5}{x}$ $x \in]0; +\infty[$, donc $x > 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4\ln x - 5 = 0 \Leftrightarrow 4\ln x = 5 \Leftrightarrow \ln x = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = e^{5/4}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4\ln x - 5 > 0 \Leftrightarrow 4\ln x > 5 \Leftrightarrow \ln x > \frac{5}{4} \Leftrightarrow x > e^{5/4}$$

$$f(e^{5/4}) = 2(\ln e^{5/4})^2 - 5\ln(e^{5/4}) + 2 = 2(5/4 \ln e)^2 - 5 \times \frac{5}{4} \ln e + 2$$

$$= 2 \times \frac{25}{16} - \frac{25}{4} + 2 = \frac{25 - 50 + 16}{8} = -\frac{9}{4}$$

x	0	$e^{5/4}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$+\infty$ ↘ -9/4 ↗ $+\infty$	

x	0	$\sqrt{e}$	e^2	$+\infty$
$f(x)$		+ □ - □ □ □ +		

c. d'après 1.b, on a : $f(x) = 0$ si $x = \sqrt{e}$ ou $x = e^2$

En regardant le tableau de variation, on peut en déduire le signe de f sur $]0; +\infty[$.

$$f(x) > 0 \text{ pour } x \in]0; \sqrt{e}[\cup]e^2; +\infty[; \quad f(x) < 0 \text{ pour } x \in]\sqrt{e}; e^2[; \quad f(x) = 0 \text{ pour } x = \sqrt{e} \text{ et } x = e^2.$$

3. Equation de la tangente T à la tangente à la courbe C au point d'abscisse $\sqrt{e}$:

$$y = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + f(\sqrt{e}); \quad f'(\sqrt{e}) = \frac{4\ln(\sqrt{e}) - 5}{\sqrt{e}} = \frac{4 \times 1/2 - 5}{\sqrt{e}} = -\frac{3}{\sqrt{e}};$$

$$f(\sqrt{e}) = 2\left(\ln(\sqrt{e})\right)^2 - 5\ln(\sqrt{e}) + 2 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} + 2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 2 = \frac{-4}{2} + 2 = 0; \quad y = \frac{-3}{\sqrt{e}}(x - \sqrt{e}) = \frac{-3}{\sqrt{e}}x + 3$$

donc (T) : $y = \frac{-3}{\sqrt{e}}x + 3$.

5.a. voir courbe ci-contre

b. Calculons $F'(x)$. $F(x) = 2x(\ln x)^2 - 9x \ln x + 11x$.

$$F'(x) = 2(\ln x)^2 + \frac{4 \times x \times \ln x}{x} - 9 \ln x - 9x \times \frac{1}{x} + 11$$

$$F'(x) = 2(\ln x)^2 + 4 \ln x - 9 \ln x - 9 + 11 \text{ d'où}$$

$F'(x) = 2(\ln x)^2 - 5 \ln x + 2 = f(x)$, F est bien une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

$$\begin{aligned} F(e^2) &= 2e^2 (\ln e^2)^2 - 9e^2 \ln e^2 + 11e^2 \\ &= 2e^2 (2 \ln e)^2 - 18e^2 \ln e + 11e^2 \\ &= 8e^2 - 18e^2 + 11e^2 = -e^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\sqrt{e}) &= 2\sqrt{e} (\ln \sqrt{e})^2 - 9\sqrt{e} \ln \sqrt{e} + 11\sqrt{e} = \frac{\sqrt{e}}{2} - \frac{9}{2}\sqrt{e} + 11\sqrt{e} \\ &= -4\sqrt{e} + 11\sqrt{e} = 7\sqrt{e} \quad \text{donc} \quad F(\sqrt{e}) - F(e^2) = 7\sqrt{e} - (-e^2) = 7\sqrt{e} + e^2 \end{aligned}$$

