Problème 21

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I =]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 2\ln(x) + 4$ et dont la représentation graphique est donnée ci-après.

1. Soit g' la dérivée de g sur l'intervalle I. Montrer que $g'(x) = 2\dfrac{x^2-1}{x}$.
2. Dresser le tableau de variation de g sur I
3. En déduire le signe de $g(x)$ sur I.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I , par $f(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\ln(x)-1}{x}$

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a . Etudier la limite de f en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe (C).

 b. Etudier la limite de f en $+\infty$ en remarquant que $f(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x}$.

2. On note f' la dérivée de f

 a. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle I , $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$

 b. En utilisant la partie A donner le signe de $f'(x)$.
 En déduire que la fonction f est croissante sur I.

 c. Calculer $f(1)$ et en déduire le signe de $f(x)$ sur I.

3. Construire sur une feuille de papier millimétré , la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ en prenant comme unité graphique 2 cm ..

Partie C

On considère la fonction F , définie et dérivable sur l'intervalle I, d'expression :

$F(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}[\ln(x)-1]^2$.

1. Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f définie à la partie B
2. Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, tracer la droite (Δ) d'équation $x = e$.
 Hachurer la partie du plan située au dessus de l'axe des abscisses et délimitée par (C) et (Δ).
3. Que représente le nombre $A = 4[F(e) - F(1)]$.
 Calculer la valeur exacte de A, puis sa valeur arrondie au centième .

PROBLÈME 22

Le but du problème est l'étude de la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 1 - \dfrac{\ln x}{x}$, où $\ln x$ désigne le logarithme népérien de x. On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique : 2 cm.

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 1 + \ln x$.

1. Étudier les variations de la fonction g. Les limites aux bornes ne sont pas demandées.
2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

1. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle $]0 ; +\infty[$. En déduire l'existence d'une droite asymptote à la courbe C que l'on précisera.
2. Démontrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $h(x)=\frac{1}{2}x^2+1$.

Construire sa courbe représentative P dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

a. Déterminer la limite de $[f(x) - h(x)]$ en $+\infty$.

b. Déterminer le signe de $[f(x) - h(x)]$.

Que peut-on en déduire pour la position relative des deux courbes C et P ?

4. Tracer la courbe C sur la feuille ci-après (à rendre avec la copie).

Partie C

1. Déterminer une primitive de la fonction : $x \to \frac{1}{x}\ln x$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2. On appelle S l'aire en cm^2, de la partie du plan limitée par les deux courbes C et P et les droites d'équations $x=1$ et $x=4$. Donner la valeur exacte de S puis la valeur arrondie au mm^2.

PROBLÈME 23

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=a\ln x+bx+\frac{c}{x}$ où a, b et c sont trois nombres réels à déterminer. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

On a représenté la fonction f sur la feuille annexe dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm. On note C la courbe représentative de cette fonction f.

On note T la tangente à la courbe C au point d'abscisse 1. La tangente T passe par l'origine O du repère. La tangente à la courbe C au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses.

PARTIE A :Recherche de l'expression de $f(x)$

1. Préciser (sans justifier) les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.

2. Déterminer $f'(x)$, en fonction de la variable x et des nombres réels a, b et c.

3. Exprimer $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$ en fonction des nombres réels a, b et c.

4. En utilisant les réponses aux questions 1.et 3., montrer que les nombres réels a, b et c sont solutions du système S suivant : $\begin{cases} b+c=1 \\ a+b-c=1 \\ 2a+4b-c=0 \end{cases}$

5. Résoudre le système S. En déduire une expression de $f(x)$.

PARTIE B : Étude de la fonction f

Dans la suite du problème la fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\infty[$ par : $f(x)=8\ln x-3x+\frac{4}{x}$

1. Déterminer par calculs la limite de f en $+\infty$ (on peut factoriser $f(x)$ par x).

2. On rappelle que : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$. En écrivant $f(x)$ sous la forme : $f(x)=\frac{1}{x}\left(8x\ln x-3x^2+4\right)$, déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. Déterminer $f'(x)$ et vérifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\infty[$: $f'(x)=\frac{(3x-2)(2-x)}{x^2}$

a. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f (justifier avec soin le signe de $f'(x)$.)

b. Montrer que, sur l'intervalle $[4\,;5]$ l'équation $f(x)=0$ a une unique solution. notée α .

c. Justifier l'encadrement de la solution α d'amplitude 10^{-2} suivant : $4{,}07<\alpha<4{,}08$.

Partie C : calcul d'une aire

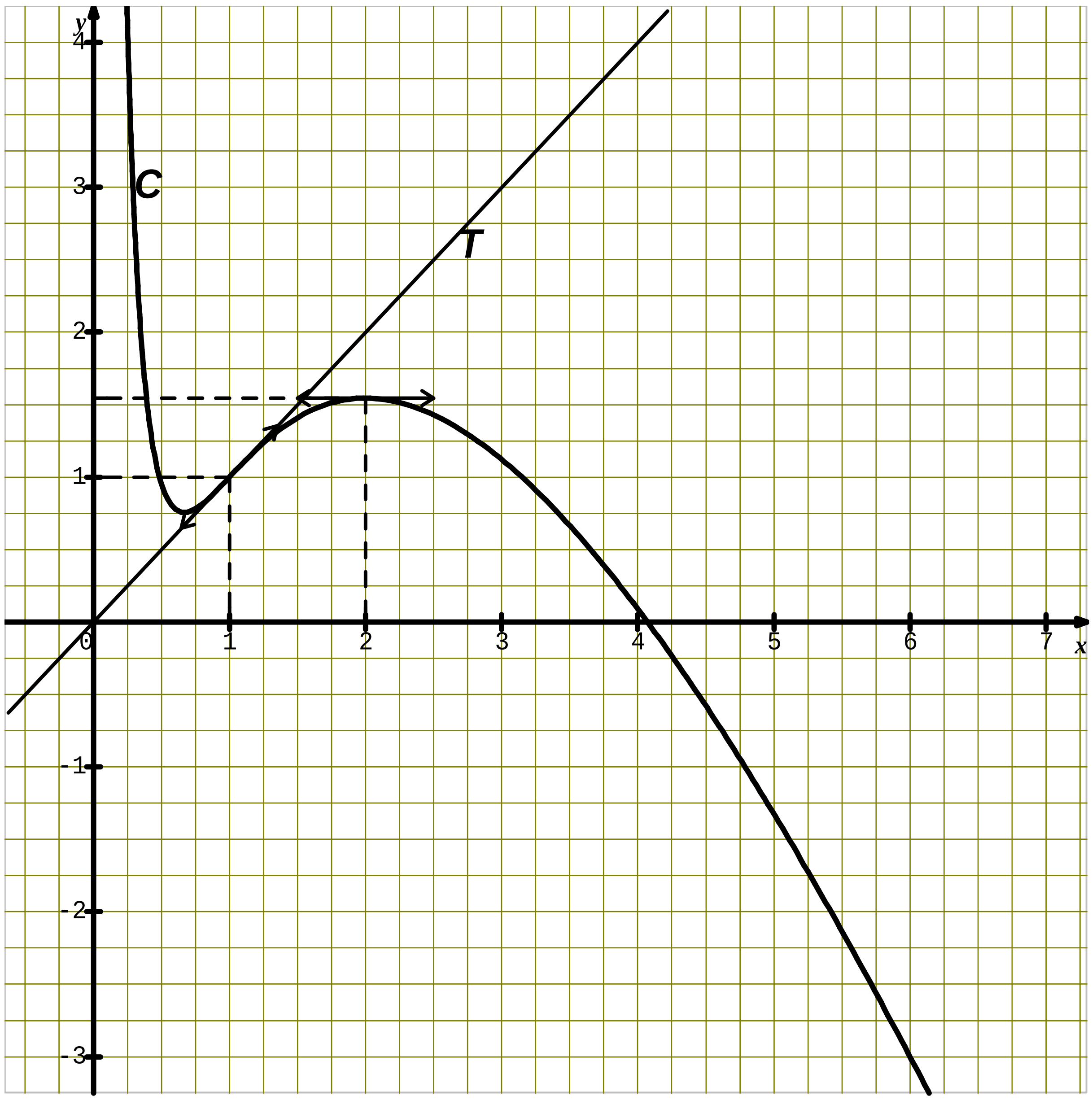
1. Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x)=(8x+4)\ln x-8x-\frac{3}{2}x^2$.

Calculer $F'(x)$ et en déduire une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

2. a. Hachurer la partie du plan limitée par la courbe C et les droites d'équation $x=1$ et $x=3$.

b. Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan hachurée ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée a 10^{-2} près.

Annexe – Problème



PROBLÈME 24

Partie A Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x^2+3x-4+4\ln x$.

1. Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.

2. Soit g' la dérivée de g. Montrer que : $g'(x)=\dfrac{2x^2+3x+4}{x}$, puis dresser le tableau de variations de g sur $]0;+\infty[$.

3. Calculer g(1) et en déduire le signe de g(x) sur $]0;+\infty[$.

Partie B

Soit *f* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x+3\ln x-\dfrac{4\ln x}{x}$. On appelle ($C_f$) la courbe de *f* dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité 3 cm).

1. a. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de *f* en 0 ; on remarquera que : $f(x)=x+\left(3-\dfrac{4}{x}\right)\ln x$. Que peut-on en déduire ?

2. a. Montrer que pour tout *x* strictement positif : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

b. En utilisant les résultats de la partie A, étudier les variations de *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3. On rappelle que pour tout *x* de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x)=x+\left(3-\dfrac{4}{x}\right)\ln x$. Donner les solutions dans l'intervalle $]0;+\infty[$ de l'équation *f*(*x*) = *x*.

4. Tracer (C_f) et la droite d'équation *y* = *x*.

5. Interpréter graphiquement le résultat de la question 3.

Partie C

1. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2-3x+3x\ln x-2(\ln x)^2$ est une primitive de *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. On considère dans le plan le domaine (D) délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations *x* = 1 et *x* = e.

a. Hachurer le domaine (D).

b. Calculer l'aire du domaine (D) en unités d'aires puis en cm². On donnera la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie au mm² près

PROBLÈME 25

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (L'unité graphique est 2 cm). Le but du problème est l'étude de la fonction *f* définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2\ln x}{x}$ puis de calculer une aire.

I) Etude d'une fonction auxiliaire g

On note g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^2-4+2\ln x$.

1. Calculer la fonction dérivée *g'* de la fonction g.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction g. (On ne demande pas les limites en 0 et en +∞.)
3. a. Démontrer que sur l'intervalle $[1;2]$ l'équation $g(x)=0$ possède une solution unique α.

b. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de ce nombre α.

4. Déduire de ce qui précède le signe de g(*x*) suivant les valeurs de *x*, dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

II) Etude de la fonction f

1. Déterminer la limite de *f* en 0. Qu'en déduit-on pour la courbe C_f ?
2. a . Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.

b. Démontrer que la droite D d'équation $y=x-1$ est asymptote à la courbe C_f ?.

c . Déterminer les coordonnées du point A commun à la courbe et à la droite D.

d . Etudier la position de la courbe C_f par rapport à la droite D.

3. Etude des variations de f.

a . Déterminer la fonction dérivée *f* ' de la fonction *f* . Vérifier que pour tout réel *x* appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$; $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$, où g est la fonction étudiée dans la partie I.

b . En utilisant les résultats de la partie I, dresser le tableau des variations de la fonction *f*

4. On note T la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse e^2. Montrer que T est parallèle à l'asymptote D.

5. Dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, tracer la droite D, la tangente T et la courbe $\mathcal{C}_f$ à l'aide de l'étude précédente. (On prendra $f(\alpha)=1,25$)

III) Calcul d'une aire

On définit sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction H par : $H(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+2\ln x-(\ln x)^2$

1. Démontrer que H est une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. Soit E la région du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

a. Hachurer la région E sur votre figure.

b . On note S l'aire, exprimée en unité d'aire, de la région E. Déterminer la valeur exacte de S.

c . Donner la valeur décimale approchée de cette aire, arrondie au mm^2.