

Problème 31

Partie A : Étude de la fonction auxiliaire g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 - \ln x - x^2$.

- Calculer $g'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction g . On a : $g'(x) = -\frac{1}{x} - 2x$.
Donc, pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a : $g'(x) < 0$.

La fonction g est donc strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

- Calcul de $g(1)$. Signe de $g(x)$.

On a : $g(1) = 1 - \ln 1 - 1 = 0$. puisque la fonction g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, on en déduit le tableau :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	-
$g(x)$		+	0

Partie B : Étude de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x} - x + 2$.

- a) Déterminer la limite de la fonction f en 0. Interpréter graphiquement cette limite.

On peut écrire : $f(x) = \frac{1}{x} \times \ln x - x + 2$. Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ donc, par produit :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty. \text{ Comme par ailleurs on a } \lim_{x \rightarrow 0} (-x + 2) = 2, \text{ on en déduit que : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

La courbe C a donc une asymptote verticale d'équation $x=0$ (axe des ordonnées)

- b) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f .

On sait que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 2) = -\infty$. Donc, par addition: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

- c) Justifier que la droite D d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à la courbe C .

On a : $f(x) - (-x + 2) = \frac{\ln x}{x}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-x + 2)) = 0$.

Donc, la droite D d'équation $y = -x + 2$ est bien asymptote oblique à C en $+\infty$.

- d) Position de la courbe C par rapport à la droite D .

Cette position est donnée par le signe de $f(x) - (-x + 2)$.

On a vu que : $f(x) - (-x + 2) = \frac{\ln x}{x}$. Or, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, $\frac{\ln x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

Donc : Sur l'intervalle $]0; 1[$, la courbe C est en-dessous de la droite D ,

Sur l'intervalle $]1; +\infty[$, la courbe C est au-dessus de la droite D ,

La courbe C coupe la droite D au point d'abscisse 1.

2. a) Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; 1[$, $f'(x) = x^2 g(x)$.

On a, d'après les règles de dérivation : $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} - 1 = \frac{1 - \ln x - x^2}{x^2}$.

Donc : $f'(x) = \frac{1 - \ln x - x^2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$.

- b) Tableau de variation de f . Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $g(x)$ qui a été vu à la question A.2)

On peut donc construire le tableau de variation de f :

x	0	1		
		$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			1	
		$-\infty$		
		$-\infty$		

3. a) Déterminer la point A de C où la tangente est parallèle à l'asymptote D .

Deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont le même coefficient directeur.

La droite D a pour coefficient directeur -1. La tangente à C au point d'abscisse x a pour coefficient directeur $f'(x)$. Il faut donc résoudre l'équation $f'(x) = -1$.

Cette équation équivaut successivement à :

$$\frac{g(x)}{x^2} = -1 \Leftrightarrow g(x) = -x^2 \Leftrightarrow 1 - \ln x - x^2 = -x^2 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

b) Équation de la tangente T à C au point d'abscisse e .

Cette tangente est précisément celle qui est parallèle à la droite D .

Son équation est donnée par la formule : $y = f'(e)(x - e) + f(e)$. Ou encore :

$$y = -1 \times (x - e) + \frac{1}{e} - e + 2 = -x + e + \frac{1}{e} - e + 2 = -x + 2 + \frac{1}{e}. \text{ Finalement : } y = -x + 2 + \frac{1}{e}.$$

4. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;1[$.

La fonction f est dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $]0;1[$. De plus, nous savons $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et que $f(1) = 1$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;1[$ telle que $f(\alpha) = 0$.

b) Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de α .

À la calculatrice, on trouve : $f(0,48) \approx -0,01$ et $f(0,49) \approx 0,05$. On en déduit : $0,48 \leq \alpha \leq 0,49$.

c. La fonction f est dérivable et strictement décroissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$. Elle est e particulier sur l'intervalle $[2;3] \subset]1;+\infty[$. De plus, nous savons $f(2) = \frac{\ln 2}{2} > 0$ et que

$$f(3) = \frac{\ln 3}{3} - 1 \approx -0,6337 < 0$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β dans l'intervalle $]0;1[$ telle que $f(\beta) = 0$.

b) Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de β .

À la calculatrice, on trouve : $f(2,44) \approx -0,006$ et $f(2,45) \approx -0,02$. On en déduit : $2,44 \leq \beta \leq 2,45$.

5. voir courbe ci-dessous.

Partie C

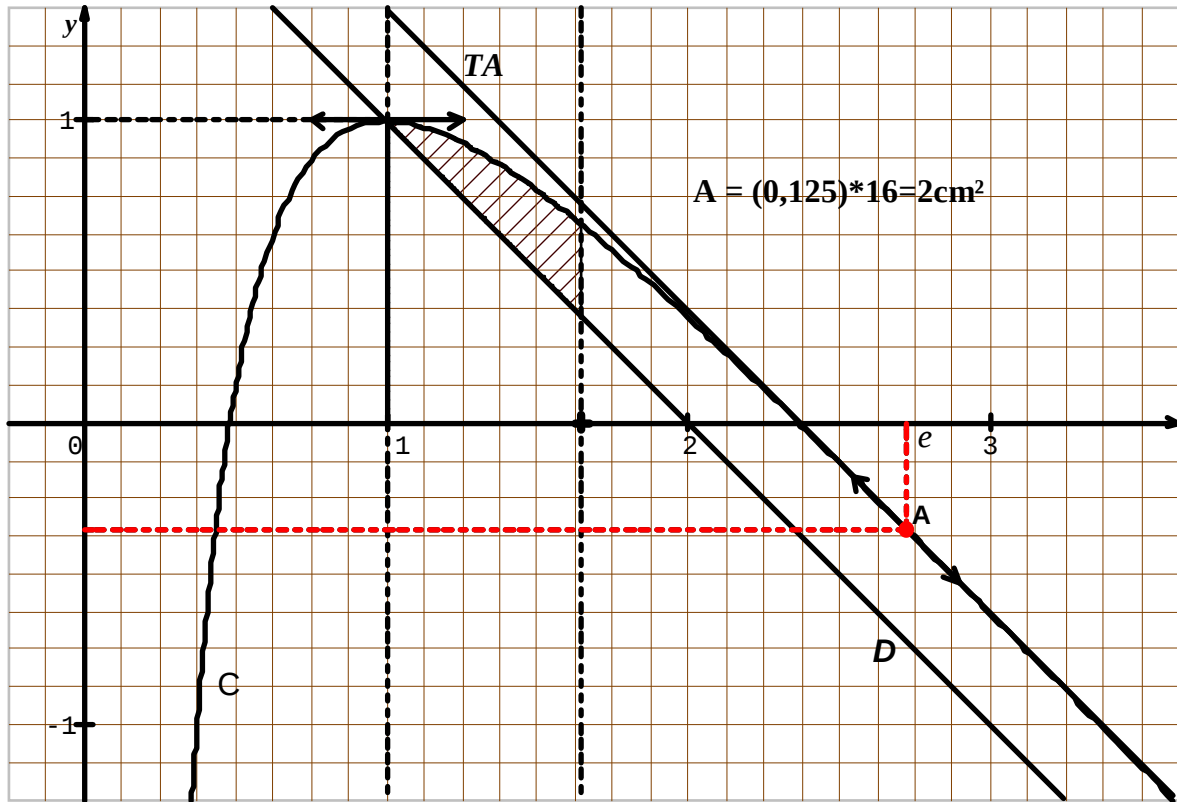
$$1. \quad h(x) = (\ln x)^2 : \quad h'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \ln x = \frac{2 \ln x}{x}, \text{ par conséquent une primitive de } \frac{\ln x}{x} \text{ est}$$

$$H(x) = \frac{1}{2} \times (\ln x)^2.$$

$$\text{On déduit que } F(x) = \frac{1}{2} \times (\ln x)^2 - \frac{1}{2} \times x^2 + 2x + c.$$

$$2. \quad A = \left(\int_1^{\sqrt{e}} (f(x) - y) dx \right)_{u.a} = \left(\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x} dx \right)_{u.a} = 16 \times [H(x)]_1^{\sqrt{e}} = 16 (H(\sqrt{e}) - H(1)) = 16 H(\sqrt{e})$$

$$A = 8 (\ln \sqrt{e})^2 = 8 \left(\frac{1}{2} \times \ln e \right)^2 = 2 \text{ cm}^2.$$



Problème 32

Partie A

1. g est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$: $g'(x) = 1 + \frac{5}{x} = \frac{x+5}{x}$. $x+5 > 0$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$. donc $g'(x) > 0$ sur

l'intervalle $]0; +\infty[$ et par conséquent la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2.a. la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$. elle est strictement croissante sur

$[1; 5] \subset]0; +\infty[$ et on a : $g(1) = 1 - 5 + 5 \ln 1 = -4 < 0$ et $g(5) = 5 - 5 + 5 \ln 5 = 5 \ln 5 > 0$

$0 \in [g(1); g(5)]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires on déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = 0$ et $\alpha \in [1; 5]$.

b. à l'aide de la calculatrice on lit : $g(1,87) = -0,0003 < 0$ et $g(1,88) = 0,036 > 0$, donc $1,87 \leq \alpha \leq 1,88$.

3. signe de $g(x)$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

Partie B

1.a. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x-5) = -5$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$, donc par produit des limites on a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

On déduit que la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe C au voisinage de 0.

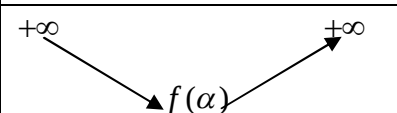
b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 \ln x}{x} = 0$ par différence des limites on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a. f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 5 \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{x - 5 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

b. pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a : $x^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe $g(x)$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$+\infty$	$+\infty$



3.a. Soit A le point de la courbe C d'abscisse 1

Equation de la tangente en A à la courbe C est : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$f'(1) = \frac{g(1)}{1^2} = g(1) = 1 - 5 + 5\ln 1 = -4 \text{ et } f(1) = \frac{(1-5)\ln 1}{1} = 0$$

$$D : y = -4(x-1) + 0 = -4x + 4.$$

Coordonnées du point d'intersection de D et de l'axe des ordonnées : c'est l'ordonnée à l'origine

On pose $x=0$ donc $y=4$ et on a : $(0;4)$.

b. graphique

Partie C

1. $F(x) = x \ln x - x - \frac{5}{2}(\ln x)^2$. F est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et on a : $(u^2)' = 2u'u$, donc

$$F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 - \frac{5}{2} \times 2 \times \frac{1}{x} \ln x = \ln x + 1 - 1 - 5 \frac{\ln x}{x} = \ln x - 5 \frac{\ln x}{x} = f(x)$$

Donc la fonction F est bien une primitive de la fonction f .

2.a. voir figure

b. Soit E le point de coordonnées $(e; 0)$ et F celui de coordonnées $(e; -1)$ et G $(1; -1)$

l'aire du rectangle AEFG vaut en unité d'aire : $A = L \times l = (e-1) \times 1 = (e-1)u.a$

or l'unité d'aire vaut $u.a = 2 \times 2 = 4cm^2$, donc l'aire du rectangle AEFG est égale

$$A = 4(e-1) \approx 6,8cm^2.$$

c.

La courbe C est en dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1; e]$

$$\text{Donc } A = \left(-\int_1^e f(x)dx \right) u.a = 4 \left(-\int_1^e f(x)dx \right) = -4[F(e) - F(1)]cm^2.$$

$$F(e) = e \ln e - e - \frac{5}{2}(\ln e)^2 = e - e - 2,5 = -2,5 \text{ et } F(1) = 1 \times \ln 1 - 1 - \frac{5}{2}(\ln 1)^2 = 0 - 1 - 0 = -1$$

$$\text{Donc } A = -4[F(e) - F(1)] = -4(-2,5 + 1) = -4 \times (-1,5) = 6cm^2$$

