PROBLÈME 31

Partie A

Soit f l'application définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x-4+\dfrac{\ln x}{4}$ et (C_f) sa courbe représentative.

1. Calculer les limites de *f* aux bornes de $]0;+\infty[$.

Justifier que (C_f) admet une asymptote et en donner une équation.

2. *a)* Étudier les variations de *f* sur $]0;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

b) En déduire que l'équation *f* (*x*) = 0 admet une solution unique α appartenant à $[3;4]$.

c) Tracer (C_f).

3. Soit *D* le domaine limité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=\alpha$ et $x=4$.

a) Calculer, pour *x* > 0, la dérivée de $x \mapsto x\ln x$.

b) En utilisant le résultat du *a)*, exprimer l'aire en cm² du domaine *D* à l'aide d'un polynôme du second degré en x.

Partie B

Dans cette partie, I désigne l'intervalle $[3;4]$.

1. Soit *g* l'application définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=4-\dfrac{\ln x}{4}$.

a) Montrer que α est solution de l'équation : $g(x)=x$.

b) Montrer que l'image de l'intervalle I par *g* est incluse dans I.

c) Montrer que, pour tout élément *x* appartenant à I : $|g'(x)|\leq\dfrac{1}{12}$

2. Soit $(u_n)_{n\in N}$ la suite définie par : u_0 = 3 et pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1}=g(u_n)$

a) En utilisant B □ **1.** *b*), montrer par récurrence que : pour tout entier naturel *n*, u_n est élément de I.

b) Prouver que, pour tout entier naturel *n* : $|u_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{12}|u_n-\alpha|$

En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel *n* : $|u_n-\alpha|\leq\dfrac{1}{12^n}$.

Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in N}$?

c) Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'inéquation : $\dfrac{1}{12^x}\leq 10^{-3}$

En déduire que u_3 est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

PROBLÈME 32

Partie A

Étude de la fonction *f* définie sur R^{+*} par : $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$

On appellera C sa courbe représentative.

1. Étudier la limite de *f* en $+\infty$.

Étudier la limite de *f* en 0.

Étudier les variations de *f* ; en dresser le tableau de variations.

2. Déterminer la valeur de *x* telle que *f*(*x*) = 0.

Écrire l'équation de la tangente T à C en ce point.

3. Tracer C et T.

Partie B

1. Montrer qu'une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est $x \mapsto \dfrac{(\ln x)^2}{2}$.

En déduire l'ensemble des primitives F de *f*.

2. Déterminer la primitive de *f* qui s'annule pour $x=1$.

Cette primitive sera appelée F_1.

Déduire de la partie A le sens de variation de F_1 ; déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition, dresser le tableau de variations et donner les intersections de la courbe représentative de F_1

avec $x'Ox$ .Représenter graphiquement F_1.

3. On appelle F_2 la primitive de *f* qui prend la valeur 0,5 pour x = 1. Donner l'expression de F_2. Expliquer la construction de la courbe représentative de F_2 à partir de celle de F_1. Tracer la courbe représentative de F_2.

Problème 33

Le plan est muni d'un repère orthormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité graphique 4 cm sur les axes . On s'intéresse dans ce problème, à la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-x+2$. On note C sa courbe représentative dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x)=1-\ln x-x^2$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$. En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie B

1.a. Déterminer la limite de la fonction f en 0 .Interpréter graphiquement cette limite .

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. Justifier que la droite D d'équation $y=-x+2$ est asymptote à la courbe C .

d. Etudier la position de la courbe C par rapport à la droite D .

2. a . Montrer que pour tout appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

b. Etablir le tableau de variation complet de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3. a. Déterminer les coordonnées du point A de la courbe C tel que la tangente en ce point soit Parallèle à l'asymptote D .

b. Déterminer une équation de la droite T, tangente à la courbe au point d'abscisse e.

4. a Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;1[$. On appelle B le point d'abscisse α.

b. Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de α.

c. Montrer que, sur l'intervalle $[2;3]$ l'équation $f(x)=0$ a une unique solution. notée β.

d. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution β

5. Dans le repère $]0;+\infty[$, voir annexe placer les points A et B puis tracer les droites *D*, T.

Partie C : Calcul d'une aire

Soit h la fonction définie sur]0 ; +∞[par $h(x)=(\ln x)^2$.

1. Calculer $h'(x)$, où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

En déduire une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle]0 ; +∞[.

2. On considère le domaine du plan *S* délimité par la droite d'équation *x* = 1, la droite d'équation $x=\sqrt{e}$, la courbe C et la droite *D*. Calculer, en unités d'aire puis en cm², la mesure de l'aire du domaine *S*.

Problème 34

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x)=x-5+5\ln x$

On note g' la fonction dérivée de la fonction g.

1. Calculer $g'(x)$ pour x dans l'intervalle $]0;+\infty[$. Etudier le signe de $g'(x)$ et donner le sens de variation de la fonction g (l'étude des limites n'est pas demandée).

2.a. Montrer que l'équation $g(x)=0$ a une solution unique dans l'intervalle $[1;5]$.

On note α cette solution .

b. Déterminer la valeur décimale arrondie au centième de α.

3. Etudier le signe de $g(x)$ pour x appartenant à $]0;+\infty[$.

Partie B

Soit *f* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{(x-5)\ln x}{x}$.

On peut donc aussi écrire : $f(x)=\dfrac{1}{x}(x-5)\ln x$ ou encore $f(x)=\ln x-\dfrac{5\ln x}{x}$.

1. a . Déterminer la limite de *f* en 0. Interpréter graphiquement ce résultat .

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2.a. Soit f' la fonction dérivée de *f* . Calculer $f'(x)$.

b. Montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ et en déduire le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction *f* .

3. On désigne par *C* la courbe représentative de *f* dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm .

a. Soit A le point de la courbe d'abscisse 1 .

Donner une équation de la droite *D* tangente en A à la courbe *C* .

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de *D* et de l'axe des ordonnées.

b. Tracer la droite *D* et la courbe *C*

Partie C

1. Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x)=x\ln x-x-\dfrac{5}{2}(\ln x)^2$.

Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f .

2. a . Hachurer l'aire du domaine plan limité par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations

$x=1$ et $x=e$.

b. Déterminer graphiquement une valeur approchée au cm² de l'aire du domaine.

c. Calculer la valeur exacte, en cm² de $A=-4\left[F(e)-F(1)\right]$.

Problème 35

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I = $\left]0;+\infty\right[$ par : $g(x)=-4\ln x+x^2+6$

(où ln désigne le logarithme népérien).

1.a. Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$.

b. Montrer que $g'(x)=0$ a une seule valeur $x=\sqrt{2}$ sur I.

c. Etudier le signe de $g'(x)$ sur I, et en déduire le tableau de variation de la fonction g

2. a. Calculer la valeur exacte de $g\left(\sqrt{2}\right)$.

b. Montrer que g est fonction positive sur l'intervalle I

Partie B

On se propose d'étudier la fonction *f* définie sur] 0 ; +∞[par : $f(x)=\frac{x}{4}-\frac{1}{2x}+\frac{\ln x}{x}$

On note C la courbe représentative de *f* dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unités graphiques : 4 cm .

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote que l'on précisera.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (Etudier la limite de la fonction *f* lorsque *x* tend vers+∞).

3.soit (Δ) la droite d'équation $y=\frac{x}{4}$.

a. Démontrer que (Δ) est asymptote à la courbe C.

b. Calculer les coordonnées du point d'intersection de C et (Δ)

c. Etudier la position relative de C et (Δ) sur] 0 ; +∞ [

4.

a. Calculer *f* '(*x*) pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$. *f* ' est la fonction dérivée de la fonction *f*

b. Vérifier que pour tout *x* de]0 ; +∞[: *f* '(*x*) = $\frac{g(x)}{4x^2}$.

c. Déduire de la partie A le sens de variation de *f* sur]0 ; +∞[.

5. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C au point A d'abscisse 1.

6. Tracer C , (T) et les asymptotes à la courbe C dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

7. Démontrer qu'il existe un seul réel □ de l'intervalle $[1;2]$ tel que $f(\alpha)=0$.

à l'aide de la calculatrice et en justifiant votre réponse donner une valeur approchée de (Δ) à 10^{-3} près.

Partie C :

Soit *k* la fonction définie sur l'intervalle] 0 ; +∞ [par $k(x)=(\ln x)^2$

1. On désigne par *k*' la fonction dérivée de la fonction *k*.

Calculer *k* '(*x*) pour tout réel *x* de l'intervalle] 0 ; +∞ [.

2. On rappelle que $h(x)=-\frac{1}{2x}+\frac{\ln x}{x}$. En déduire une primitive *H* de la fonction *h* sur l'intervalle] 0 ; +∞ [qui s'annule quand *x* vaut 1 .

3. à l'aide des questions précédentes déterminer une primitive *F* de *f* sur l'intervalle

] 0 ; +∞ [.Hachurer sur le graphique la partie *E* du plan limitée par la courbe C , la droite (Δ)et le droites (d_1) et (d_2) d'équations : $(d_1): x=\sqrt{e} \quad et \quad (d_2): x=e$.

4. Calculer le nombre $A=8\times[H(e^2)-H(\sqrt{e})]$. Donner la valeur exacte .