Problème 36

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ (unités graphiques : 1cm sur l'axe des abscisses
et 4cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A: Recherche d'une fonction

Soit *g* une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par: $g(x)=a(\ln x)^2+b\ln x+c$, où *a, b* et *c* sont trois réels.
Déterminer *a, b* et *c* sachant que sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ passe par les points A(1 ; 2), B (e ; 0) et C (e^2 ; 0).

Partie B: Etude d'une fonction

Soit *f* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par: $f(x)=(\ln x)^2-3\ln x+2$.

1. a. Calculer la limite de *f* en 0.
   b. Calculer la limite de *f* en +∞. On pourra remarquer que pour tout *x* de $]0;+\infty[$, on a : $f(x)=\ln x(\ln x-3)+2$
2. a. Montrer que : $f'(x)=\dfrac{2\ln x-3}{x}$ où *f '* désigne la fonction dérivée de *f*.
   b. Etudier le signe de *f'*(*x*) selon les valeurs de *x*.
   c. Dresser le tableau de variations de *f* sur $]0;+\infty[$.
3. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue *X* : $X^2-3X+2=0$.
   b. En déduire les solutions exactes dans $]0;+\infty[$ de l'équation : *f*(*x*) = 0.
   c. Déduire, des questions 2.c. et 3.b, le signe de *f*(*x*) lorsque *x* varie dans l'intervalle $]0;+\infty[$.
4. On note Γ la courbe représentative de *f* dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.
   a. Déterminer une équation de la tangente (Δ) à la courbe Γ au point d'abscisse e.
   b. Tracer la courbe Γ et la tangente (Δ).
5. Soit H la fonction définie sur $]0;+\infty[$, par : $H(x)=x(\ln x)^2-5x\ln x+5x$
   Calculer $H'(x)$ et conclure .
6. calculer le nombre $A=H(e^2)-H(e)$.

Problème 37

Dans tout le problème, le plan *P* est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm. Soit *f* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x+2+\ln x}{x}$

Partie A

1. Il semble que l'axe des ordonnées soit asymptote à la courbe *C* . Le prouver par le calcul.
2. a) Vérifier que pour tout *x* de $]0;+\infty[$, $f(x)=1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$
   b) Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.
   c) En déduire l'existence d'une asymptote *D* à la courbe *C*. Donner son équation et la tracer sur la page 3. a) Prouver que, pour tout x de $]0;+\infty[$ $f'(x)=\dfrac{-1-\ln x}{x^2}$.
   b) Montrer que *f '* (*x*) s'annule en changeant de signe en $\dfrac{1}{e}$.
   c) Etablir le tableau de variation de *f*. Dans ce tableau, on donnera la valeur exacte du maximum de *f*.
   d) Tracer La courbe représentative *C* de la fonction *f* dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Partie B

1.Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{x+2}{x}$ et H . la courbe représentative de g

a) Etudier rapidement la fonction g sur $]0;+\infty[$ (dérivée, limites, tableau de variation).

b) Donner les équations des deux asymptotes de la courbe H .

2. a) Calculer $f(x)$ -$g(x)$ et étudier son signe.

b) Montrer que les deux courbes C et H se coupent en un point K d'abscisse 1.

c) Etudier la position relative des deux courbes C et H .

Placer le point K et construire la courbe H dans le repère précédent.

Annexe problème

x	0,1	0,2	0,5	1	2	2,5	3	4	5	7	8
$g(x)$											
$f(x)$											

Problème 38

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x)=x^2+3-2\ln(x)$ et dont la représentation

graphique est donnée ci-après. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g

1. A l'aide du tableau de signes de la fonction g' sur l'intervalle $]0;+\infty[$, indiquer les variations de la

La fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

x	0		1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$

3.Calculer $g(1)$ puis en déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$, par $f(x)=\dfrac{1}{2}x+1-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{\ln(x)}{x}$

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal

$(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a . Etudier la limite de f en 0 .Interpréter graphiquement le résultat .

b. Etudier la limite de f en $+\infty$

2. a. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction dérivée de f' de la fonction f définie par : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x^2}$ .En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout nombre x strictement positif.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3. a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Une solution unique notée α.

b. Donner , en justifiant un encadrement d'amplitude 0,01 du nombre réel α.

4. Déterminer une équation de la droite T tangente à la courbe (C) au point d'abscisse1.

5. Soit D la droite d'équation $y=\frac{1}{2}x+1$.

a. Montrer que la droite D est asymptote oblique à la courbe (C) en $+\infty$.

b. Démontrer que la droite D coupe la courbe (C) en un point B d'abscisse $e^{1/2}$.

c. Etudier les positions relatives de la courbe (C) et de la droite D sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

6. Tracer dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ en prenant comme unité graphique 2 cm, les droites T et D, ainsi la courbe (C).

Partie C

1. Hachurer sur le graphique la partie E du plan délimitée parla courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=e^{1/2}$ et $x=e$.

2. a. Montrer que la fonction H définie par $H(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $h(x)=\frac{\ln x}{x}$.

b. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

c. Montrer que la valeur exacte de l'aire A de la partie du plan hachurée E est, en unité d'aire,

$A=\frac{2e^2+6e-8e^{1/2}+1}{8}$. En déduire une valeur arrondie à 10^{-2} de l'aire A.

Problème 39

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I =] 0; +∞ [par : $g(x)=\ln x-1-\frac{9}{2}x^2$

(où ln désigne le logarithme népérien).

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$. Etudier son signe sur] 0; +∞ [.
2. Etudier le sens de variation de la fonction g (on ne demande pas les limites en 0 et en +∞).
3. En déduire pour tout $x\in]0;+\infty[$ le signe de $g(x)$.

Partie B

On se propose d'étudier la fonction f définie sur] 0 ; +∞[par : $f(x)=-9x+5-\frac{2\ln x}{x}$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote que l'on précisera.

3. Calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$. (Etudier la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$).

4.soit(Δ)la droite d'équation $y=-9x+5$. On considère la fonction h définie sur]0 ; +∞[par $h(x)=f(x)-(-9x+5)$.

a. Démontrer que (Δ)est asymptote à la courbe C.

b. Calculer les coordonnées du point d'intersection de C et (Δ)

c. Etudier la position relative de C et (Δ) sur]0 ; +∞[

5. *a*. Calculer *f* '(*x*) pour tout $x \in \left]0;+\infty\right[$. *f '* est la fonction dérivée de la fonction *f*

   b. Vérifier que pour tout *x* de]0 ; +∞[: *f* '(*x*) = $\frac{2g(x)}{x^2}$.

   c. Déduire de la partie A le sens de variation de *f* sur]0 ; +∞[.

6. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C au point A d'abscisse 1.
7. Tracer C , (T) et les asymptotes à la courbe C dans le repère $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j})$.
8. Démontrer qu'il existe un seul réel (Δ) de l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$ tel que $f(\alpha)=0$.

   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

Partie C :

Soit *h* la fonction définie sur l'intervalle] 0 ; +∞ [par $h(x)=(\ln x)^2$

1.On désigne par *h*' la fonction dérivée de la fonction *h* .
   Calculer *h*'(*x*) pour tout réel *x* de l'intervalle] 0 ; +∞ [.

2. En déduire une primitive *F* de la fonction *f* sur l'intervalle] 0 ; +∞ [.
3. Hachurer sur le graphique la partie *E* du plan limitée par la courbe C , l'axe des abscisses

   et le droites (d_1) et (d_2) d'équations : $(d_1): x=1 \quad et \quad (d_2): x=e$.
4. Calculer le nombre $A=-5\times[F(e)-F(1)]$. Donner la valeur exacte.