

Corrigés

PROBLEME 1

PARTIE A

1. $g(x) = x^2 + 3x - 4 + 4 \ln x$

$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3x - 4) = -4$; $\lim_{x \rightarrow 0} 4 \ln x = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3x - 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \ln x = 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

2. Soit g' la dérivée de g . $g'(x) = 2x + 3 + \frac{4}{x} = \frac{2x^2 + 3x + 4}{x}$

3. $g'(x)$ est du signe de $2x^2 + 3x + 4$, calculons les racines de ce polynôme :

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 2 \times 4 = 9 - 32 = -23 < 0$, donc $2x^2 + 3x + 4$ n'a pas racine et reste toujours strictement positif, (prendre le signe de $a = 2$) par conséquent $g'(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$, il en résulte que g est croissante sur $]0 ; +\infty[$

4. $g(1) = 1 + 3 - 4 + 4 \ln 1 = 0$ donc $g(x) < 0$ sur $]0 ; 1[$ et $g(x) > 0$ sur $]1 ; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$	
$g(x)$		-	0	+

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	+
$g(x)$		$-\infty$	$+\infty$

PARTIE B

1. a. limite de f en $+\infty$.

$f(x) = x + 3 \ln x - \frac{4 \ln x}{x}$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \ln x = 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \frac{\ln x}{x} = 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b. la limite de f en 0 ; $f(x) = x + \left(3 - \frac{4}{x}\right) \ln x$: $x + \left(3 - \frac{4}{x}\right) \ln x = x + 3 \ln x - \frac{4 \ln x}{x} = f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4}{x} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 - \frac{4}{x}\right) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \left(3 - \frac{4}{x}\right) \ln x = +\infty$ de plus

$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

On peut en déduire que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C)

2. a. Pour tout x strictement positif : $f(x) = x + 3\ln x - \frac{4\ln x}{x}$

$$f'(x) = 1 + \frac{3}{x} - 4 \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = 1 + \frac{3}{x} - 4 \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

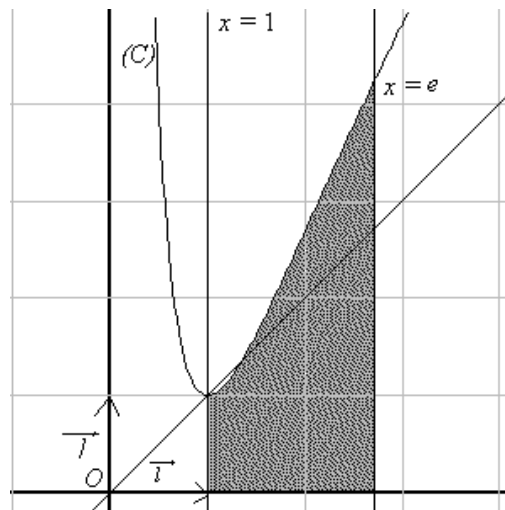
$$f'(x) = \frac{x^2 + 3x - 4(1 - \ln x)}{x^2} = \frac{x^2 + 3x - 4 + 4\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

b. $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ dont le signe a été trouvé

Partie A 4.

c. $f(1) = 1 + 3\ln 1 - 4 \frac{\ln 1}{1} = 1$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$+\infty$ 1 $+\infty$	



3. On rappelle que pour tout x de l'intervalle

$$]0; +\infty[, f(x) = x \Leftrightarrow x + \left(3 - \frac{4}{x}\right) \ln x = x \Leftrightarrow \left(3 - \frac{4}{x}\right) \ln x = 0$$

$$3 - \frac{4}{x} = 0 \text{ et } \ln x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ ou } x = 1, \text{ donc } S = \left\{1; \frac{4}{3}\right\}.$$

4. voir graphique

5. La droite d'équation $y = x$ coupe la courbe (C) en deux points de coordonnées (1 ; 1) et (4/3 ; 4/3)

Partie C

1. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3x\ln x - 2(\ln x)^2$; $F'(x) = x - 3 + 3\ln x + 3 - 2 \times 2 \frac{\ln x}{x}$ et on a :

$$F'(x) = x + 3\ln x - \frac{4\ln x}{x} = f(x).$$

donc F est une primitive de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. a.

b. $\int_1^e f(x) dx = [F(x)]_1^e = F(e) - F(1) = \frac{e^2}{2} - 3e + 3e\ln e - 2(\ln e)^2 - \left(\frac{1}{2} - 3\right) = \left(\frac{e^2}{2} - 2 + \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(e^2 + 1)$

1u.a = $3^2 = 9\text{cm}^2$, donc $A = 9 \times \frac{1}{2}(e^2 + 1) = \frac{9}{2}(e^2 + 1)\text{cm}^2 \approx 37,75\text{cm}^2$

PROBLEME 2

1) Etude d'une fonction auxiliaire g

1) $g'(x) = 2x + \frac{2}{x} = \frac{2x^2 + 2}{x}$

2) $g'(x) > 0$ comme somme de deux expressions strictement positive sur $]0; +\infty[$
donc g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

3) Résolution de l'équation $g(x) = 0$.

a) $g(1) = 1 - 4 + 2\ln 1 = -3 < 0$ et $g(2) = 2^2 - 4 + 2\ln 2 = 2\ln 2 > 0$. g est strictement croissante sur $[1; 2]$, g est dérivable sur $[1; 2]$ et $g(1) < 0 < g(2)$, donc l'équation $g(x) = 0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $[1; 2]$.

b) $g(1,70) < 0 < g(1,71)$ donc $1,70 < \alpha < 1,71$

4) On en déduit que $g(x) < 0$ sur $]0; \alpha[$ et $g(x) > 0$ sur $] \alpha; +\infty[$ et $g(\alpha) = 0$

II) Etude de la fonction f

1) La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe C

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = -1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0} -2\ln x = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\ln x}{x} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \ln x \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \text{et on a finalement} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

2) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2\ln x}{x} = -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

b) $h(x) = f(x) - (x-1) = \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2\ln x}{x} = -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$$\text{Donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = 0$$

c) $f(x) = x-1 \Leftrightarrow \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$. donc l'abscisse du point

d'intersection de C et D est e et son ordonnée est $e-1$ (en remplaçant $x = e$ dans l'équation de D , on trouve $y = e-1$)

d) $h(x) = f(x) - (x-1) = \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x} = \frac{2(1-\ln x)}{x}$, $f(x) - (x-1)$ est du signe de $1 - \ln x$,

$1 - \ln x > 0$ si et seulement si $\ln x < 1$ soit $x < e$.

Conclusion : sur l'intervalle $]0; e]$, la courbe C est au dessus de la droite D . sur l'intervalle $[e; +\infty[$ la courbe C est en dessous de la droite D

3) Etude des variations de f .

a) $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} - 2 \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = 1 - \frac{2}{x^2} - 2 \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 4 + 2\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

b) $f'(x)$ est donc du signe de $g(x)$, on en déduit les variations de f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

4) On note T la tangente à la courbe C au point d'abscisse e^2 .

$$f'(e^2) = \frac{e^4 - 4 + 2\ln e^2}{e^4} = \frac{e^4 - 4 + 4\ln e}{e^4} = 1$$

le coefficient directeur de la tangente T est le même que le coefficient directeur de la droite D soit 1.

5)

III) Calcul d'une aire

$$1) H(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln x - (\ln x)^2 : H'(x) = x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x}$$

donc H est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2)

a) voir figure

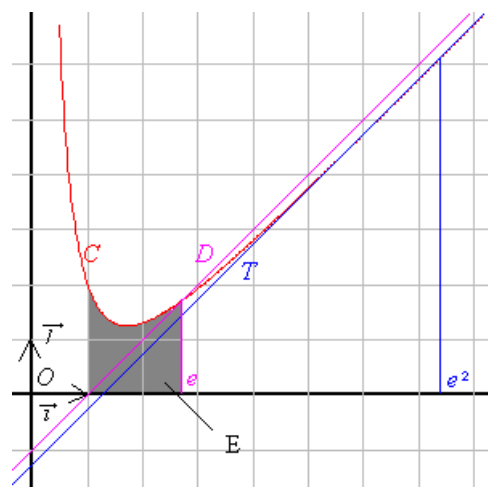
b)

$$S = \int_1^e f(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + 2\ln x - (\ln x)^2 \right]_1^e = \left[\frac{e^2}{2} - e + 2\ln e - (\ln e)^2 - \left(\frac{1}{2} - 1 + 2\ln 1 - (\ln 1)^2 \right) \right]$$

$$S = \left[\frac{e^2}{2} - e + 2\ln e - (\ln e)^2 - \left(\frac{1}{2} - 1 + 2\ln 1 - (\ln 1)^2 \right) \right] = \left(\frac{e^2}{2} - e + \frac{3}{2} \right) \text{ u.a}$$

c) valeur décimale approchée de cette aire, arrondie au mm^2 (2 chiffres après la virgule)

l'unité d'aire est 4 cm^2 on a $S = 9,90 \text{ cm}^2$



PROBLEME 3

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$

par : $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	+
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

$$1. g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x}, \text{ pour } x \in]0; +\infty[; 2x^2 + 1 > 0 \text{ et } \frac{1}{x} > 0, \text{ donc } g'(x) > 0. \text{ on}$$

en déduit que la fonction g est croissante (strictement) sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$2. g(1) = 1^2 - 1 + \ln 1 = 0$$

en utilisant le fait que la fonction g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $g(1) = 0$

on en déduit le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$:

Partie B

$$1. f'(x) = a - \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		0	+

2. La courbe C passe par le point de coordonnées (1 ; 0) et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, $f(1) = 0$

et $f'(1) = 0$ soit : $f(1) = 0 \Leftrightarrow a + b - \frac{\ln 1}{1} = a + b = 0$;

$$f'(1) = a - \frac{1 - \ln 1}{1^2} = a - 1 = 0$$

Donc $a = 1$ et $b = -1$ et enfin $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$

Partie C : Etude de la fonction **f**

1. a. $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = -1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln x \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe C

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2. a. $f'(x) = 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

b. $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$, on en déduit les variations de f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$
		0	$+\infty$

c. 0 est le minimum absolue de la fonction f sur son ensemble de définition on $f(x) \geq 0$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

3. On considère la droite D d'équation $y = x - 1$.

a. $f(x) - (x - 1) = -\frac{\ln x}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

donc la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

b. Etudions le signe de $f(x) - (x - 1)$ d'après a. il est du signe de $-\ln x$ soit :

$-\ln x > 0$ équivaut à $\ln x < 0$ ou encore $\ln x < \ln 1$ soit $x < 1$:

si $x < 1$ alors $f(x) - (x - 1) > 0$ donc sur l'intervalle $]0 ; 1[$, la courbe C est au dessus de l'asymptote D.

si $x > 1$ alors

$f(x) - (x - 1) < 0$ donc sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$,

la courbe C est au dessous de l'asymptote D.

Si $x = 1$, la courbe C et la droite D se coupent en un point de coordonnées (1; 0)

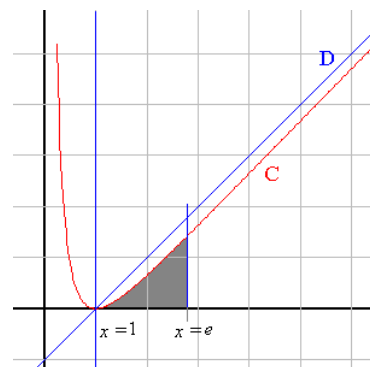
c.

Partie D : Calcul d'aire

1. a. $H(x) = (\ln x)^2$: $H = u^2$ avec $u = \ln x$ et $u' = \frac{1}{x}$,

$$H' = 2u'u \text{ et on a : } H'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$$

b. une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ est



la fonction F définie par : $F(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}(\ln x)^2$

2. a. b.

$$S = \int_1^e f(x) dx = [F(x)]_1^e = \left[\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_1^e = \left[\frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2}(\ln e)^2 - \left(\frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2 \right) \right] = \left(\frac{e^2}{2} - e \right) \text{u.a}$$

$$1 \text{u.a} = 4 \text{cm}^2 \Rightarrow A = 4 \left(\frac{e^2}{2} - e \right) = (2e^2 - 4e) \text{cm}^2$$