PROBLEME 1

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 3x - 4 + 4\ln x$.

1. Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.

2. Soit g' la dérivée de g. Montrer que : $g'(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 4}{x}$,puis dresser le tableau de variations de g sur $]0;+\infty[$.

3. Calculer g(1) et en déduire le signe de g(x) sur $]0;+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + 3\ln x - \dfrac{4\ln x}{x}$.On appelle ($\mathcal{C}_f$) la courbe de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité 3 cm).

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de f en 0; on remarquera que : $f(x) = x + \left(3 - \dfrac{4}{x}\right)\ln x$.Que peut-on en déduire ?

2. a. Montrer que pour tout x strictement positif : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

   b. En utilisant les résultats de la partie A, étudier les variations de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

   c. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3. On rappelle que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x) = x + \left(3 - \dfrac{4}{x}\right)\ln x$

   Donner les solutions dans l'intervalle $]0;+\infty[$ de l'équation f(x) = x.

4. Tracer ($\mathcal{C}_f$) et la droite d'équation y = x.

5. Interpréter graphiquement le résultat de la question 3.

Partie C

1. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + 3x\ln x - 2(\ln x)^2$

   est une primitive de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. On considère dans le plan le domaine (D) délimité par la courbe ($\mathcal{C}_f$), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = e.

a. Hachurer le domaine (D).

b. Calculer l'aire du domaine (D) en unités d'aires puis en cm². On donnera la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie au mm² près

PROBLEME 2

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (L'unité graphique est 2 cm). Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$f(x) = x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x}$ puis de calculer une aire.

I) Etude d'une fonction auxiliaire g

On note g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 4 + 2\ln x$.

1. Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g.
2.Déterminer le sens de variation de la fonction g.(On ne demande pas les limites en 0 et en + ∞.)
3. a. Démontrer que sur l'intervalle $[1;2]$ l'équation $g(x) = 0$ possède une solution unique α.
   b. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de ce nombre α.
4. Déduire de ce qui précède le signe de g(x) suivant les valeurs de x, dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

II) Etude de la fonction f

1. Déterminer la limite de f en 0. Qu'en déduit-on pour la courbe C_f ?
2. a . Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Démontrer que la droite D d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe C_f ?.
   c . Déterminer les coordonnées du point A commun à la courbe C_f et à la droite D.
   d . Etudier la position de la courbe C_f par rapport à la droite D.

3. Etude des variations de f.

a . Déterminer la fonction dérivée f ' de la fonction f . Vérifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, où g est la fonction étudiée dans la partie I.

b . En utilisant les résultats de la partie I, dresser le tableau des variations de la fonction f

4. On note T la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse e^2. Montrer que T est parallèle à l'asymptote D.

5. Dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, tracer la droite D, la tangente T et la courbe C_f à l'aide de l'étude précédente.
(On prendra $f(\alpha) = 1,25$)

III) Calcul d'une aire

On définit sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction H par : $H(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln x - (\ln x)^2$

1. Démontrer que H est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2.Soit E la région du plan limitée par la courbe C_f ,l'axe des abscisses et les droites d'équations x =1 et x = e.

a. Hachurer la région E sur votre figure.

b . On note S l'aire, exprimée en unité d'aire, de la région E. Déterminer la valeur exacte de S.

c . Donner la valeur décimale approchée de cette aire, arrondie au mm^2.

PROBLEME 3

Le plan P est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

On s'intéresse dans ce problème à une fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ .On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan P. On note ln la fonction logarithme népérien.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^2-1+\ln x$.

On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g.

1. Calculer g'(x) pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
   En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Calculer g(1) et en déduire l'étude du signe de g(x) pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie B : Détermination de l'expression de la fonction f

On admet qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0;+\infty[$, $f(x)=ax+b-\frac{\ln x}{x}$

1. on désigne par f ' la fonction dérivée de la fonction f.
   Calculer f '(x) pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Sachant que la courbe C_f passe par le point de coordonnées (1; 0) et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, déterminer les nombres a et b.

Partie C : Etude de la fonction f

On admet désormais que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en 0 et donner une interprétation graphique de cette limite.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. a. Vérifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$
   b. Etablir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   c. En déduire le signe de f(x) pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

3. On considère la droite D d'équation $y = x - 1$.
   a. Justifier que la droite D est asymptote à la courbe $\boldsymbol{C}_f$.
   b. Etudier les positions relatives de la courbe $\boldsymbol{C}_f$ et de la droite D.
   c. Tracer la droite D et la courbe C dans le plan P muni du repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

PARTIE D : CALCUL D'AIRE

On note A la mesure, exprimée en cm², de l'aire de la partie du plan P comprise entre la courbe $\boldsymbol{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation x = 1 et x = e.

1. On considère la fonction H définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $\mathrm{H(x)} = \left(\ln x\right)^2$.
   On désigne par H ' la fonction dérivée de la fonction H.
   a. Calculer H'(x) pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.
   b. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$
2. Calculer A. Donner la valeur de A , arrondie au mm².