

Corrigés

PROBLEME 5

Partie A $f(x) = x^2 + ax + b - 2\ln x$

Déterminons les valeurs de a et de b tels que la courbe C d'équation $y=f(x)$ passe par $A(1;-3)$ et que la tangente à C en A soit parallèle à l'axe Ox .

On doit avoir : $f(1) = -3$ et $f'(1) = 0$. Or $f'(x) = 2x + a - \frac{2}{x}$

On en déduit : $f(1) = 1 + a + b - 2\ln 1 = a + b - 1 = -3$ donc : $a + b = -4$

$$f'(1) = 2 + a - \frac{2}{1} = a = 0$$

donc : $a = 0$ et $b = -4$. La fonction f cherchée est donc définie par : $f(x) = x^2 - 4 - 2\ln x$

Partie B

1.a) On a clairement : $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 4) = -4$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$. On en déduit que la droite d'équation : $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe au voisinage de 0

(l'axe Oy est asymptote à C).

2.a) Vérifier pour $x > 0$: $f(x) = x \left(x - \frac{4}{x} - \frac{2\ln x}{x} \right)$. C'est évident !

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{4}{x} - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. On peut écrire : $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}$.

Signe de $f'(x)$. Tableau de variation de f .

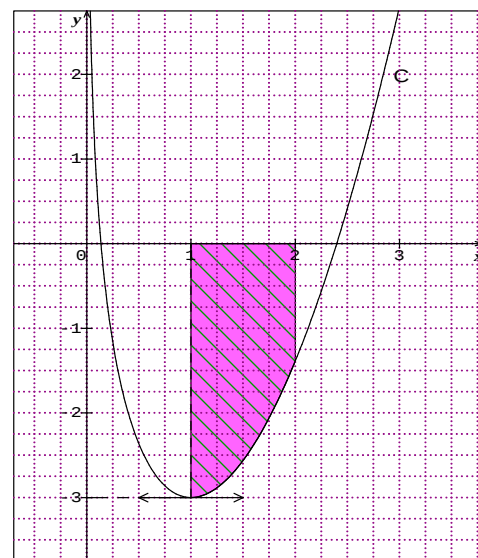
x	0	1	$+\infty$
$x-1$		0	+
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$	-3	$+\infty$

4. Signe de $f(x)$ lorsque $x \in [1; 2]$.

On sait que $f(1) = -3$. Par ailleurs $f(2) = 2^2 - 4 - 2\ln 2 = -2\ln 2$.

Donc $f(2) < 0$. La fonction f étant dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $[1; 2]$ on en déduit qu'elle est strictement négative sur cet intervalle.

5. Courbe C .



Partie C. Calcul de $H'(x)$. On a : $H(x) = x \ln x - x$. Donc :

$$H'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

En déduire une primitive de f sur I . Une primitive de f sur I est définie par :

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 4x - 2(x \ln x - x) \text{ ou encore : } F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x - 2x \ln x$$

Calcul de l'aire de Δ . La fonction f étant négative sur l'intervalle $[1; 2]$,

L'unité d'aire vaut 4 cm^2 Donc on peut écrire que cette aire est donnée

$$\text{par : Aire}(\Delta) = 4 \times \left(-\int_1^2 f(x) dx \right) = 4 \times [-F(x)]_1^2 = 4 \times [F(1) - F(2)] \text{ Donc : } F(1) = \frac{1}{3} - 2 - 2 \ln 1 = -\frac{5}{3} \text{ et}$$

$$F(2) = \frac{8}{3} - 4 - 4 \ln 2, \text{ donc}$$

$$\text{Aire}(\Delta) = 4 \times [F(1) - F(2)] = 4 \times \left(-\frac{5}{3} - \frac{8}{3} + 4 + 4 \ln 2 \right) = 4 \left(4 \ln 2 - \frac{13}{3} \right) = 16 \ln 2 - \frac{52}{3} \approx 9,75 \text{ cm}^2.$$

PROBLEME 7

Partie A

$$g(x) = a(\ln x)^2 + b \ln x + c$$

$A \in \mathbb{C}$, donc les coordonnées du point A vérifie l'équation de g :

$$g(1) = a(\ln 1)^2 + b \ln 1 + c = 2 ; \ln 1 = 0, \text{ donc } c = 2, \text{ de même } B \in \mathbb{C}, \text{ on a :}$$

$$g(e) = a(\ln e)^2 + b \ln e + c = 0 \Rightarrow a + b + 2 = 0, \text{ puisque } \ln e = 1$$

$$C \in \mathbb{C} \Rightarrow g(e^2) = a(\ln e^2)^2 + b \ln e^2 + c = 0 \Rightarrow a(2 \ln e)^2 + 2b \ln e + 2 = 0 \Rightarrow 4a + 2b + 2 = 0$$

On doit résoudre un système d'équation linéaire à deux inconnues : $\begin{cases} a + b = -2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1 \text{ et } b = -3$

Partie B

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = (\ln x)^2 - 3 \ln x + 2$

$$1.a \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} ((\ln x)^2 - 3 \ln x + 2) \text{ or } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty \text{ d'où}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\ln x)^2 = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -3 \ln x = +\infty$$

Donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$. La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

$$b. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x ((\ln x) - 3) + 2 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} ((\ln x) - 3) = +\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$3.a \text{ } f \text{ est dérivable sur }]0; +\infty[; f(x) = (\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 \quad f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x - 3 \times \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x} - \frac{3}{x}.$$

$$(\text{car } (u^2)' = 2u'u \text{ et } (\ln x)' = \frac{1}{x}) \text{ pour tout réel } x \text{ de l'intervalle }]0; +\infty[: f'(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x}.$$

$$3.b \text{ variations de la fonction } f \text{ sur l'intervalle }]0; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x} \quad x \in]0; +\infty[, \text{ donc } x > 0.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\ln x = 3 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{3/2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2\ln x - 3 > 0 \Leftrightarrow 2\ln x > 3 \Leftrightarrow \ln x > \frac{3}{2} \Leftrightarrow x > e^{3/2}$$

$$f(e^{3/2}) = (\ln e^{3/2})^2 - 3\ln(e^{3/2}) + 2 = (3/2 \ln e)^2 - 3 \times \frac{3}{2} \ln e + 2$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = \frac{9-18+8}{4} = -\frac{1}{4}$$

x	0	$e^{3/2}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$+\infty$ ↘ -1/4 ↗ $+\infty$	

c. d'après 1.b, on a : $f(x) = 0$ si $x = e$ ou $x = e^2$. En regardant le tableau de variation, on peut en déduire le

signe de f sur $]0; +\infty[$.

$f(x) > 0$ pour $x \in]0; e[\cup]e^2; +\infty[$; $f(x) < 0$ pour $x \in]e; e^2[$; $f(x) = 0$ pour $x = e$ et $x = e^2$.

3. a. $x^2 - 3x + 2 = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$; $x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$.

$$S = \{1; 2\}$$

b. sur l'intervalle $]0; +\infty[$, résolvons l'équation $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$. Posons $X = \ln x$. l'équation devient

$$X^2 - 3X + 2 = 0. \text{ On a vu que } X = 1 \text{ ou } X = 2.$$

$$\ln x_1 = 1 = \ln e \Leftrightarrow x_1 = e \quad \ln x_2 = 2 = 2\ln e = \ln e^2 \Leftrightarrow x_2 = e^2 \quad S = \{e; e^2\}.$$

c. $f(x) = (\ln x - 1)(\ln x - 2)$

4. Equation de la tangente T à la tangente à la courbe C au point d'abscisse $\sqrt{e}$:

$$y = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + f(\sqrt{e}) ;$$

$$f'(\sqrt{e}) = \frac{2\ln(e) - 3}{e} = \frac{2-3}{e} = -\frac{1}{e} ;$$

$$f(e) = (\ln e)^2 - 3\ln e + 2 = 1 - 3 + 2 = 0 ; y = \frac{-1}{e}(x - e) = \left(\frac{-1}{e}\right)x + 1, \text{ donc (T) : } y = \frac{-1}{e}x + 1$$

x	0	e	e^2	$+\infty$
$\ln x - 1$		- 0 +		
$\ln x - 2$		-	- 0 +	
$f(x)$		+ 0 -	0 +	

5.a. voir courbe ci-contre

b. Calculons $F'(x)$. $H(x) = x(\ln x)^2 - 5x\ln x + 5x$

$$F'(x) = (\ln x)^2 + \frac{2x \times \ln x}{x} - 5 \ln x - 5x \times \frac{1}{x} +$$

$$F'(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x - 5 \ln x - 5 + 5$$

d'où

$$F'(x) = (\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = f(x),$$

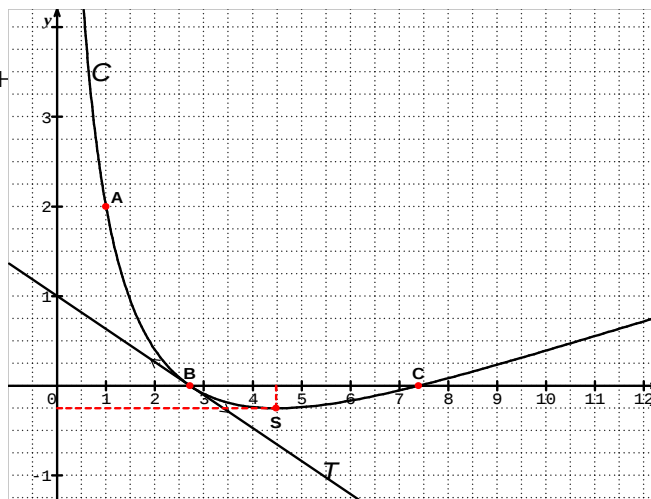
$$6. H(x) = x(\ln x)^2 - 5x \ln x + 5x$$

$$H(e^2) = e^2 (\ln e^2)^2 - 5e^2 \ln e^2 + 5e^2$$

$$= e^2 (2 \ln e)^2 - 10e^2 + 5e^2$$

$$= 4e^2 - 5e^2 = -e^2$$

$$H(e) = e (\ln e)^2 - 5e \ln e + 5e = e - 5e + 5e = e. A = H(e^2) - H(e) = -e^2 - e$$



PROBLEME 8

1.a. On a $g(2) = 0$.

b. T est tangente à C au point d'abscisse 2 donc $g'(2)$ est égal au coefficient directeur de T.

Graphiquement on lit ce coefficient : $\frac{3}{2}$ donc $g'(2) = \frac{3}{2}$.

c. Si D est asymptote à C lorsque x tend vers $+\infty$, alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

d. On obtient graphiquement : si $x \in]1; 2[$ alors $g(x) < 0$; si $x \in [2; +\infty[$ alors $g(x) \geq 0$. D'où

$$2.a. g_1(2) = 1 - \frac{1}{2-1} = 0 \quad g_2(2) = 1 - \frac{2}{4-2} = 0.$$

$g_3(2) = \ln(2-1) = 0$. On ne peut donc éliminer aucune fonction.

x	1	2	$+\infty$
Signe de $g(x)$		-	0 +

$$b. \lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x) = 1 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 - x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g_2(x) = 1$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-1) = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_2(x) = +\infty$. On peut donc éliminer la fonction g_3 .

$$c. g_1'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \text{ donc } g_1'(2) = \frac{1}{2-1} = 1 \quad g_2'(x) = \frac{2(2x-1)}{(x^2-x)^2} \quad g_2'(2) = \frac{2(4-1)}{(4-2)^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Il s'agit donc de la fonction g_2 .

PARTIE B

1.a. $f(x) = x + 1 + 2 \ln x - 2 \ln(x-1)$ $x \in]1; +\infty[$. On sait que : $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$ donc

$$f(x) = x + 1 + 2 \ln \left(\frac{x}{x-1} \right)$$

b. $\lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-1) = -\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$. donc la droite $x=1$ est asymptote

verticale à la courbe.

2.a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{x-1} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b. On a vu que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{x-1} = 0$, donc la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe lorsque x tend vers $+\infty$.

c. Si $x \in]1; +\infty[$ alors $x-1 > 0$, $x > 1$ et $x > x-1 > 0$ donc $\frac{x}{x-1} > 1$; si $\frac{x}{x-1} > 1$ alors $\ln \frac{x}{x-1} > 0$

donc $\ln \frac{x}{x-1} > 0$ pour tout $x \in]1; +\infty[$. et par conséquent

C est

au dessus de Δ pour tout $x \in]1; +\infty[$

3.a. $f'(x) = 1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{(x-1)}$ $f'(x) = 1 + \frac{2(x-1) - 2x}{x(x-1)}$

,donc $f'(x) = 1 - \frac{2}{x(x-1)} = g_2(x)$.

b. On a vu précédemment le signe de g_2 . On a donc:

Partie C

1. On a $H'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - [\ln(x-1) + (x-1) \times \frac{1}{x-1}]$. $H'(x) = \ln x + 1 - [\ln(x-1) + 1]$;

$H'(x) = \ln x + 1 - \ln(x-1) - 1$ $H'(x) = \ln x - \ln(x-1) = h(x)$. Donc H est une primitive de h sur $]1; +\infty[$.

2.a. voir graphique

b. $A = \left(\int_2^3 (f(x) - (x+1)) dx \right)_{u.a} = \left(\int_2^3 2 \ln \frac{x}{x-1} dx \right)_{u.a} = \left(\int_2^3 h(x) dx \right)_{u.a}$

$A = [h(x)]_2^3$ $A = 2[(3 \ln 3 - 2 \ln 2) - 2 \ln 2]$ **et** $A = 2[3 \ln 3 - 4 \ln 2]$ **u.a = 1,08 u.a.**

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$+\infty$	$+\infty$

$3 + 2 \ln 2$