PROBLEME 5

Partie A

Soient a et b deux nombres réels. On note I l'intervalle $]0;+\infty[$.

On considère la fonction numérique f définie, pour tout nombre réel x de I, par :

$f(x) = x^2 + ax + b - 2\ln x$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm). Soit A le point de coordonnées (1 ; -3).

Calculer les valeurs respectives des nombres réels a et b pour que, d'une part la courbe C_f passe par le point A et que, d'autre part, la tangente à cette courbe au point A admette un coefficient directeur égal à 0.

Partie B

Dans toute la suite du problème, on étudiera la fonction numérique f définie, pour tout nombre réel x de I, par : $f(x) = x^2 - 4 - 2\ln x$.

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en 0.

   b) Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?

2. a) Vérifier que, pour tout nombre réel x de I, on a $f(x) = x\left(x - \frac{4}{x} - 2\frac{\ln x}{x}\right)$.

   b) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f puis montrer que, pour tout nombre réel x de I, on a $f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$.

4. Étudier le signe de la fonction f' sur I et dresser le tableau de variations de la fonction f sur I.

5. Déterminer le signe de $f(x)$ quand le nombre réel x appartient à l'intervalle $[1;2]$.

6. Tracer la courbe C_f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie C

Soit H la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x de I, par :

$H(x) = x\ln x - x$.

1. Calculer $H'(x)$ où H' désigne la fonction dérivée de H.

2. En déduire une primitive F de la fonction f sur I.

3. On appelle Δ la partie du plan limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. Hachurer Δ. Calculer la valeur exacte de l'aire de Δ en unités d'aire, puis en cm².

PROBLEME 7

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unités graphiques : 1cm sur l'axe des abscisses
et 4cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A: Recherche d'une fonction

Soit g une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par: $g(x) = a(\ln x)^2 + b\ln x + c$, où a, b et c sont trois réels.
Déterminer a, b et c sachant que sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ passe par
les points A(1 ; 2), B (e ; 0) et C (e^2 ; 0).

Partie B: Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par: $f(x) = (\ln x)^2 - 3\ln x + 2$.

1. a. Calculer la limite de f en 0.
   b. Calculer la limite de f en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout x de $]0;+\infty[$,
   on a : $f(x) = \ln x(\ln x - 3) + 2$
2. a. Montrer que : $f'(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x}$ où f ' désigne la fonction dérivée de f.
   b. Etudier le signe de f'(x) selon les valeurs de x.
   c. Dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.
3. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue X : $X^2 - 3X + 2 = 0$.
   b. En déduire les solutions exactes dans $]0;+\infty[$ de l'équation : f(x) = 0.
   c. Déduire, des questions 2.c. et 3.b, le signe de f(x) lorsque x varie dans l'intervalle $]0;+\infty[$.
4. On note Γ la courbe représentative de f dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.
   a. Déterminer une équation de la tangente (Δ) à la courbe Γ au point d'abscisse e.
   b. Tracer la courbe Γ et la tangente (Δ).
5. Soit H la fonction définie sur $]0;+\infty[$, par : $H(x) = x(\ln x)^2 - 5x\ln x + 5x$ .Calculer $H'(x)$ et conclure .
6. calculer le nombre $A = H(e^2) - H(e)$.

PROBLEME 8

Partie A

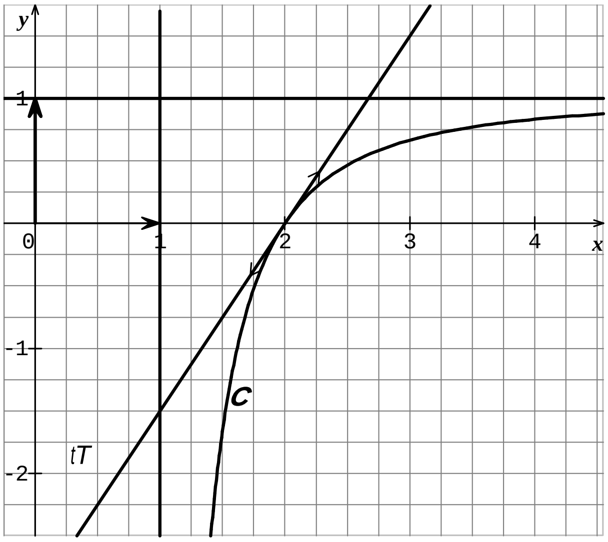
On donne dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unités graphiques :
3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées, la représentation graphique (C) d'une fonction g définie, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$ ainsi que deux droites (T) et (D). La droite (T) passe par les points de coordonnées respectives $(2;0)$ et $(0;-3)$. La droite (D) a pour équation $y = 1$.

1.a. Déterminer graphiquement g (2).

b. Sachant que la droite (T) est tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 2, déterminer graphiquement g' (2).

c. On admet que la droite (D) est asymptote à la courbe (C). Déterminer graphiquement la limite de g (x) quand x tend vers $+\infty$.

d. Sachant que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un seul point. Etudier graphiquement le signe de la fonction g sur l'intervalle $]1;+\infty[$.



2. On définit les fonctions g_1, g_2, g_3 sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par : $g_1(x)=1-\frac{1}{x-1}$; $g_2(x)=1-\frac{2}{x^2-x}$ et $g_3(x)=\ln(x-1)$.

L'une d'elles est la fonction g que l'on se propose d'identifier en utilisant les résultats de la première question.

a. Calculer g_1 (2), g_2 (2), g_3 (2). Ces résultats permettent-ils d'éliminer une des trois fonctions ?

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g_1(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g_2(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g_3(x)$. Quelle fonction peut-on alors éliminer ?

c**.** On note g'_1 et g'_2 les fonctions dérivées respectives de g_1 et g_2. Calculer g'_1 (2), g'_2 (2) puis conclure.