

PROBLEME 13

Partie A : Etude du signe de $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$. ($\ln x$ désigne le logarithme népérien de x)

1. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction g . (Les limites ne sont pas demandées). Calculer $g(1)$.
3. Dédire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie B : On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}$.

On appelle (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (unités : 3 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées.)

1.a Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

1.b Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à (C) .
Y a-t-il une autre asymptote à (C) ? Si oui, donner son équation.

1.c Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

1.d En utilisant les résultats précédents, déterminer le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de f .

1.e Calculer les coordonnées du point d'intersection entre l'asymptote (D) et la courbe (C) .

Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D) .

1.f Tracer dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C) et les droites (D) .

2.a Montrer que la fonction H définie par : $H(x) = \frac{-1}{x}(1 + \ln x)$ est une primitive de la

fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

2.b. Soit Δ le domaine plan limité par (D) , (C) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$.
Hachurer Δ ;

calculer la valeur exacte de l'aire, en cm^2 , de Δ ; en donner une valeur approchée au mm^2

PROBLEME-14

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln x - 1 - \frac{9}{2}x^2$$

(où $\ln$ désigne le logarithme népérien).

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. Etudier son signe sur $]0; +\infty[$.
2. Etudier le sens de variation de la fonction g (on ne demande pas les limites en 0 et en $+\infty$).
3. En déduire pour tout $x \in]0; +\infty[$ le signe de $g(x)$.

Partie B

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = -9x + 5 - \frac{2 \ln x}{x}. \text{ On note } C \text{ la courbe représentative de } f \text{ dans un repère}$$

orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote que l'on précisera.

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (Etudier la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$).

4. soit (Δ) la droite d'équation $y = -9x + 5$. On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par

$$h(x) = f(x) - (-9x + 5).$$

a. Démontrer que (Δ) est asymptote à la courbe C .

b. Calculer les coordonnées du point d'intersection de C et Δ

c. Etudier la position relative de C et Δ sur $]0; +\infty[$

5. a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. f' est la fonction dérivée de la fonction f

b. Vérifier que pour tout x de $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^2}$.

c. Déduire de la partie A le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.

6. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C au point A d'abscisse 1.

7. Tracer C , (T) et les asymptotes à la courbe C dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

8. Démontrer qu'il existe un seul réel α de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

Partie C :

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = (\ln x)^2$

1. On désigne par h' la fonction dérivée de la fonction h . Calculer $h'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

3. Hachurer sur le graphique la partie E du plan limitée par la courbe C , l'axe des abscisses

et les droites (d_1) et (d_2) d'équations : $(d_1): x = 1$ et $(d_2): x = e$.

4. Calculer la valeur exacte A de l'aire de ce domaine exprimée en cm^2 . Donner la valeur exacte.

PROBLEME 15

Le but du problème est d'étudier la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 1 + 2 \ln x}{x}. \text{ On note } C \text{ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un}$$

repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

A. ETUDE D'UNE FONCTION AUXILIAIRE

On introduit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

- 1) Etudier les variations de g (on ne demande pas la recherche de limites).
- 2) En déduire le signe de g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

B. ETUDE DE f ET TRACE DE LA COURBE C .

- 1)a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de f en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe C .

c) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$ $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$

- 2) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe C .

b) Déterminer l'abscisse x_A du point A, intersection de la courbe C et de la droite (Δ)

c) Etudier la position relative de C et (Δ)

- 3) a) Déterminer la tangente T à C au point d'abscisse $x_B = 1$.

b) Déterminer l'abscisse x_C du point où la courbe admet une tangente T' parallèle à la droite (Δ) .

- 4)a) Calculer l'ordonnée du point D de C d'abscisse $x_D = e$.

b) Montrer que les abscisses x_A , x_B , x_C et x_D des points A, B, C et D sont les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

Placer dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ les points A, B, C et D. Tracer les droites (Δ) , T , T' puis la courbe C .

C. CALCUL D'UNE AIRE

- 1) Calculer la dérivée h de la fonction H définie sur $]0; +\infty[$ par $H(x) = (\ln x)^2$.

2) Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe C , la droite D et les droites d'équation $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ et $x = e$

PROBLEME 16

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln x - 2x^2 - 1$ (où $\ln$ désigne le logarithme népérien).

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. Etudier son signe sur $]0; +\infty[$.
2. Etudier le sens de variation de la fonction g (on ne demande pas les limites en 0 et en $+\infty$).
3. En déduire pour tout $x \in]0; +\infty[$ le signe de $g(x)$.

Partie B

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = -2x + 1 - \frac{\ln x}{x}$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique : 2 cm.

1. Calculer $f(1)$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
4. Démontrer que la droite D d'équation $y = -2x + 1$ est asymptote à la courbe C.
5. Etudier la position relative de C et D sur $]0; +\infty[$
6. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. f' est la fonction dérivée de la fonction f
Vérifier que pour tout x de $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. Déduire de la partie A le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
7. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C au point d'abscisse 1.
8. Tracer C, (T) et les asymptotes à la courbe C dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie C :

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$

1. On désigne par h' la fonction dérivée de la fonction h . Calculer $h'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. Hachurer sur le graphique la partie E du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites (d_1) et (d_2) d'équations : $(d_1): x = 1$ et $(d_2): x = e$.
4. Calculer la valeur exacte A de l'aire de ce domaine exprimée en cm^2 . Donner la valeur exacte.

PROBLEME 17

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$

et on note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm)

Partie A : Etude de la fonction f .

1. Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$ (pour cette dernière on pourra remarquer que : $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$)

2. a. Montrer que : $f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$ pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$

b. En déduire le sens de variation de f . Dresser le tableau de variation de f .

Partie B : Etude de quelques points particuliers de C

1. Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection M_1 de C avec l'axe des abscisses.

2. Soit $x_2 = \frac{1}{\sqrt{e}}$. On note M_2 le point de C d'abscisse x_2 .

Déterminer une équation de la tangente Δ_2 au point M_2 . vérifier que Δ_2 passe par O.

3. Indiquer l'abscisse x_3 du point M_3 de C tel que la tangente Δ_3 à C en M_3 soit parallèle à l'axe des abscisses.

4. Soit f'' la fonction dérivée de f' : calculer $f''(x)$ pour x appartenant à $]0; +\infty[$.

Déterminer le réel x_4 qui annule $f''(x)$. On appelle M_4 le point de C d'abscisse x_4 .

5. Vérifier que x_1, x_2, x_3, x_4 sont quatre termes consécutifs d'une suite géométrique dont on indiquera la raison.

6. Placer les points M_1, M_2, M_3, M_4 dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Construire les tangentes Δ_2 et Δ_3 puis la courbe C .

Partie C : Calcul d'une aire

1. On note g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = (\ln x)^2$. Calculer la dérivée de g .

En déduire une primitive de f sur $]0; +\infty[$, après avoir remarqué que :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

2. Hachurer le domaine plan limité par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équation

$x = \frac{1}{e}$ et $x = 2$. Calculer la valeur exacte A de l'aire de ce domaine exprimée en cm^2 .