Corrige

Problème 2

1. Limite en $-\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=16$

Donc la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y=16$ en $-\infty$.

2. a) On développe : $(e^x-2)(e^x-8)=e^{2x}-8e^x-2e^x+16=e^{2x}-10e^x+16$

2. b) Limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-2\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-8\right)=+\infty$ Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

3. a . Pour tout réel x, on a : $f'(x)=2e^{2x}-10e^x=2e^x(e^x-5)$.

3. b) Une exponentielle étant toujours strictement positive, on a :

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-5=0 \Leftrightarrow e^x=5 \Leftrightarrow x=\ln 5$

De même : $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-5>0 \Leftrightarrow e^x>5 \Leftrightarrow x>\ln 5$

On obtient donc le tableau de signe suivant pour la dérivée et les variations de la fonction :

x	$-\infty$		$\ln 5$		$+\infty$
e^x-5		$-$	0	$+$	
$2e^x$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	16	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

Avec : $f(\ln 5)=e^{2\ln 5}-10e^{\ln 5}+16=e^{\ln 25}-10\times 5+16$

$f(\ln 5)=25-50+16=-9$

4. ***Tableau de valeurs :***

x	-3	-2	-1	0	1	2	2,2
$f(x)$	**15,5**	**14,7**	**12,5**	7	**-3,8**	**-3,3**	**7,2**

5. a) Le coefficient directeur de la droite tangente au point d'abscisse 0 est égal au nombre dérivé en 0, c'est-à-dire $f'(0)$:

$f'(0)=2e^0(e^0-5)=2(1-5)=-8$

5. b) et 5. c) Courbe représentative

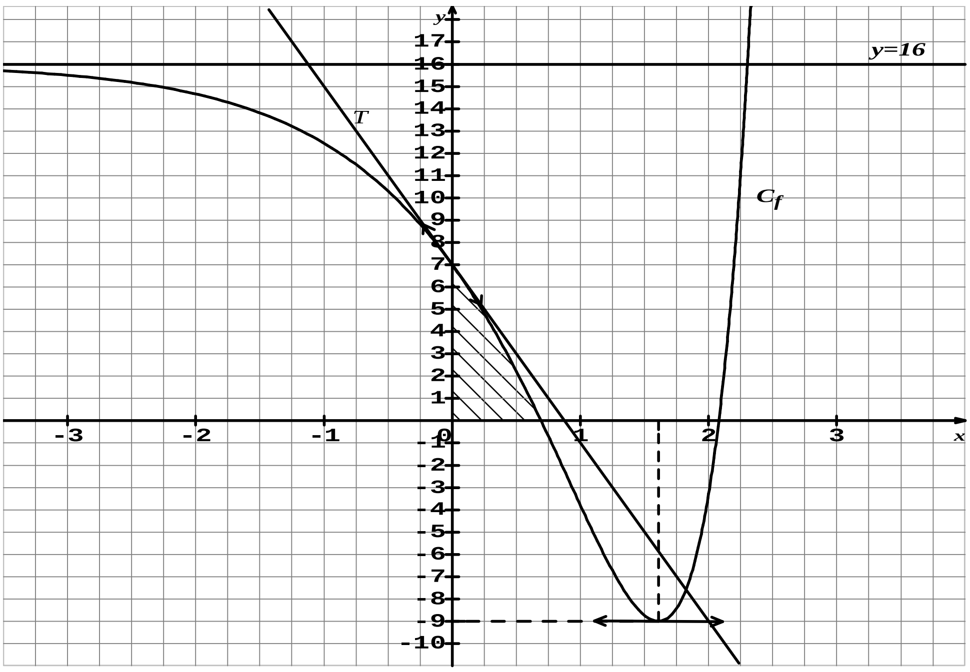
6.a) $f(\ln 2)=e^{2\ln 2}-10e^{\ln 2}+16=e^{\ln 4}-10\times 2+16=4-20+16=0$

Sur l'intervalle $[0\,;\ln 2]$ la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, donc $f(x)\geq 0$.

b) Calcul de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\ln 2]$.

$I=\int_0^{\ln 2} f(x)dx=\int_0^{\ln 2}(e^{2x}-10e^x+$

$I=\int_0^{\ln 2} f(x)dx=\left(\frac{e^{2\ln 2}}{2}-10e^{]}\right.$



$I=\left(\frac{e^{\ln 4}}{2}-10\times 2+16\ln 2\right)-\left(\frac{1}{2}-10\right)=\left(2-20+16\ln 2\right)-\left(-\frac{19}{2}\right)=-18+16\ln 2+9{,}5=-8{,}5+16\ln 2$.

La fonction f étant positive sur $[0\,;\ln 2]$, alors l'intégrale est égale à l'aire en unité d'aires ; l'unité d'aire est égale à $2\times 0,5 = 1cm^2$ donc : $(-8,5+16\ln 2)cm^2$.

6. c) $(-8,5+16\ln 2) \approx 2,59\ cm^2$

Problème 3

Partie A : Etude graphique et détermination d'une fonction

1. On lit : $f(0)=4\ f(-1)=2$

2. Graphiquement, on lit : $f(x)<0$ pour $x<x_0$ et pour $x>x_1$; $f(x)>0$ pour $x_0<x<x_1$

3. a) $f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse 0. Cette droite est T, elle est horizontale, donc $f'(0)=0$.

b) f' est positive quand f est croissante et négative quand f est décroissante.

On lit donc : $f'(x)$ est positive sur $[-1;0]$; $f'(x)$ est négative sur $[0;2]$.

4. $f(x)=(x+a)e^{-x}+bx^2+3$ et $f'(x)=e^{-x}-(x+a)e^{-x}+2bx$

Donc $f(0)=ae^0+3=2$, donc $a+3=4 \Leftrightarrow a=4-3=1$.

$f(-1)=(-1+a)e^{-1}+b+3=2 \Leftrightarrow (-1+1)e^{-1}+b+3=2 \Leftrightarrow 0+b=2-3 \Leftrightarrow b=-1$.

On peut aussi vérifier avec $f'(0)$. Donc $f'(0)=e^0-(0+1)e^0+2b=1-1+2b\times 0=0$

$f(x)=(x+1)e^{-x}-x^2+3$

Partie B : Etude de la fonction f sans utilisation graphique

1. On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^{-x}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\lim\limits_{u\to+\infty}e^{u}=+\infty$; et : $\lim\limits_{x\to-\infty}-x^2+3=-\infty$;

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty \quad (-\infty-\infty)$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$, car $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}-x^2+3=-\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x+1)e^{-x}-x^2+3\right)="0-\infty"=-\infty$

3. a) En se servant des formules : on a : $f'(x)=e^{-x}-(x+1)e^{-x}-2x=-x(e^{-x}+2)$

b) Une exponentielle est toujours strictement positive, donc $e^{-x}>0$ et $e^{-x}+2>0$ donc $f'(x)=-x(e^{-x}+2)$ est du signe de $-x$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

4. a) Sur [1 ; 2], la fonction f est dérivable et strictement

décroissante de $f(1)=2e^{-1}+2\approx 2,74$ à

$f(2)=3e^{-2}-1\approx -0,59$ et $0\in[f(2);f(1)]$. Donc il existe donc une unique solution de l'équation $f(\alpha)=0$ sur l'intervalle [1 ; 2].

4. b) On procède par encadrements successifs : $1<\alpha<2$: $f(1,5)\approx 1,37$ donc $1,5<\alpha<2$; $f(1,8)\approx 0,22$ donc $1,8<\alpha<2$; $f(1,9)\approx -0,18$, donc $1,8<\alpha<1,9$. $f(1,8)\approx 0,03$ donc $1,85<\alpha<1,9$;

Partie C : Calcul d'une aire

1. a) *G* est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut (on utilise les formules) :

$G'(x)=-1\times e^{-x}-(-x-2)e^{-x}=(-1+x+2)e^{-x}=(x+1)e^{-x}=g(x)$

Donc *G* est une primitive de *g* sur **R**.

1. b) On en déduit que la fonction $F(x)=(-x-2)e^{-x}-\dfrac{x^3}{3}+3x$ est une primitive de f sur **R**.

2. L'unité graphique est de 2 cm, donc une unité d'aire correspond à 4 cm². De plus, f est positive sur [-1 ; 1]. Donc l'aire A est donnée par :

$A=4\int_{-1}^{1}f(x)dx=4[F(x)]_{-1}^{1}=4(F(1)-F(-1))$

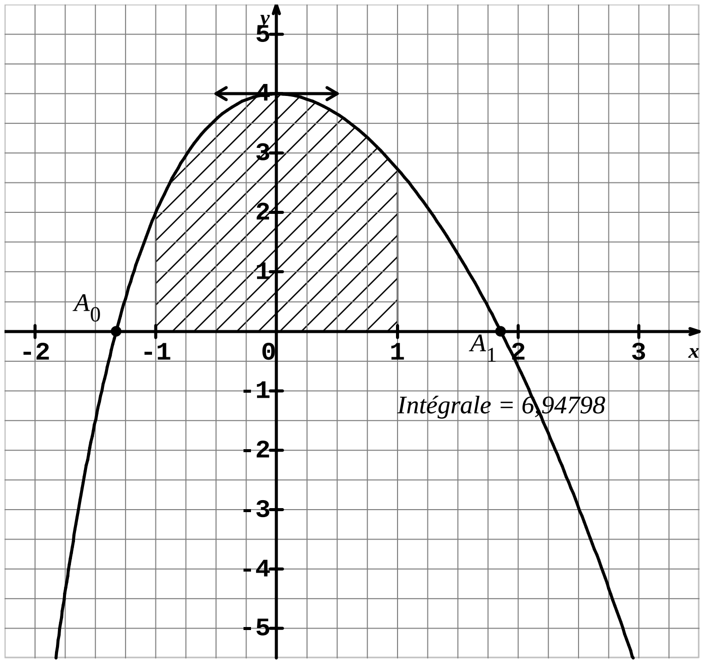
Or

$F(1)=(-1-2)e^{-1}-\frac{1^3}{3}+3=-3e^{-1}-\frac{1}{3}+3=-3e^{-1}+\frac{8}{3}$

et $F(-1)=(+1-2)e^{1}+\frac{1^3}{3}-3=-e+\frac{1}{3}-3=-e-\frac{8}{3}$

D'où

$A=4\left(F(1)-F(-1)\right)=4\left(-3e^{-1}+\frac{8}{3}-\left(-e-\frac{8}{3}\right)\right)=4\left(\frac{16}{3}-3e^{-1}+e\right)cm^2$



Problème 4

Partie A

1. La courbe passe par le point de coordonnées $(\ln 2\,;2)$ donc $f(\ln 2)=2$.
   La courbe passe par le point de coordonnées $A(0\,;3)$ donc $f(0)=3$.
2. La courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\ln 2$ donc $f'(\ln 2)=0$.
   La courbe admet une tangente de coefficient directeur -2 d'abscisse 0 donc $f'(0)=-2$.
3. La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y=6$ en $-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=6$.

Partie B

1. On développe : $(e^x-2)^2+2=(e^x)^2-2e^x\times 2+2^2+2=e^{2x}-4e^x+6$. Donc : $f(x)=(e^x-2)^2+2$
2. Calcul de $f(\ln 2)$: $f(\ln 2)=(e^{\ln 2}-2)^2+2=(2-2)^2+2=2$
3. a) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=6$

3. b) Le calcul de cette limite prouve l'existence de l'asymptote horizontal d'équation $y=6$ en $-\infty$.

4. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-2)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-2)^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
e^x-2		$-$	0	+	
$2e^x$		+		+	
$f'(x)$		$-$	0	+	
$f(x)$	6	↘	2	↗	$+\infty$

5. a) $f'(x)=2e^{2x}-4e^x=2e^x(e^x-2)$

5. b) Pour tout réel x, on a $e^x>0$ donc : $f'(x)=0\Leftrightarrow e^x-2=0\Leftrightarrow e^x=2\Leftrightarrow x=\ln 2$

5. c) Pour tout réel x, on a $e^x>0$ donc : $f'(x)>0\Leftrightarrow e^x-2>0\Leftrightarrow e^x>2\Leftrightarrow x>\ln 2$

5. d) Signe de $f'(x)$ et variations de f

6. Démontrons que l'équation $f(x)=7$ admet une solution unique sur **R**

- la fonction f est dérivable sur $[\ln 2;+\infty[$;
- la fonction f est strictement croissante sur $[\ln 2;+\infty[$;
- 7 est compris entre $f(\ln 2)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$;

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=7$ admet une solution unique α sur $[\ln 2;+\infty[$.

L'équation $f(x)=7$ n'admet pas de solution sur $]-\infty;\ln 2]$ car f est dérivable et strictement décroissante sur $]-\infty;\ln 2]$ de 6 à 2, et 7 n'appartient pas à l'intervalle [2 ; 6]. l'équation $f(x)=7$ admet une unique

solution sur **R**. Encadrement de la solution $f(1)\approx 2,5$ et $f(2)\approx 31$, donc $1\leq\alpha\leq 2$

$f(1,4)\approx 6,2$ et $f(1,5)\approx 8,2$ donc $1,4\leq\alpha\leq 1,5$

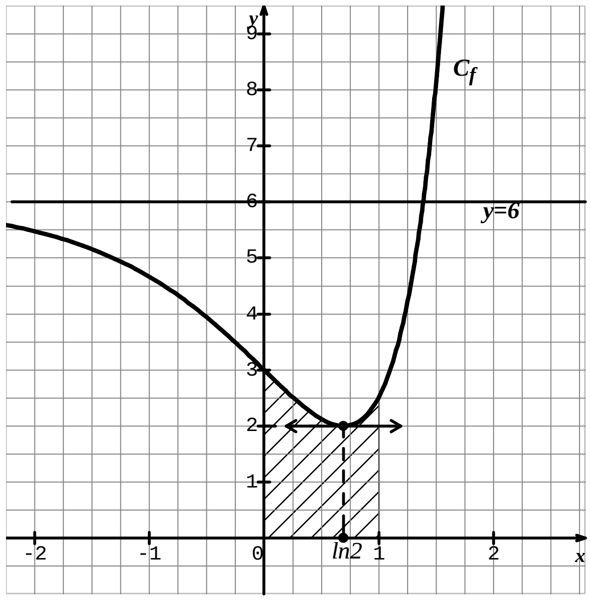
Partie C

1. Calcul de la dérivée de *F*

$$F'(x)=\frac{1}{2}\times 2\times e^{2x}-4e^{x}+6=e^{2x}-4e^{x}+6$$

On a pour tout réel x: $F'(x)=f(x)$ donc *F* est une primitive de f sur **R.**

2. Voir courbe ci-dessous.



3. Calcul de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 1] .

$$I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(e^{2x}-4e^{x}+6)dx=\left[\frac{e^{2x}}{2}-4e^{x}+6x\right]_0^1$$

$$I=\left(\frac{e^2}{2}-4e+6\right)-\left(\frac{e^0}{2}-4e^0\right)$$

$$I=\left(\frac{e^2}{2}-4e+6-\frac{1}{2}+4\right)=\left(\frac{e^2}{2}-4e+9,5\right)$$

La fonction étant positive sur [0 ; 1], l'aire du domaine hachuré est donné par :

$$A=u.a\times I=1\times 1,5\times\left(\frac{e^2}{2}-4e+9,5\right)cm^2$$

Problème 5

Partie A : limites aux bornes de l'ensemble de définition

1. Calcul de la limite en $-\infty$ On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$.

Donc la courbe C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y=4$ en $-\infty$.

2. a) On développe : $(e^x-1)(e^x-4)=e^{2x}-4e^x-e^x+4=e^{2x}-5e^x+4$.

2. b) Calcul de la limite en $+\infty$. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-4)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Partie B : Intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses

Résolution de $f(x)=0$: $(e^x-1)(e^x-4)=0\Leftrightarrow e^x-1=0\ ou\ e^x-4=0$

$\Leftrightarrow e^x=1\ ou\ e^x=4\Leftrightarrow x=\ln 1=0\quad ou\quad x=\ln 4$

Donc les abscisses des points d'intersection avec l'axe des abscisses sont $0\ et\ \ln 4$.

Partie C : étude des variations de la fonction f

1. a) Calcul de la dérivée, en utilisant: $f'(x)=2e^{2x}-5e^x=e^x(2e^x-5)$

1. b) Une exponentielle étant toujours strictement positive, on a :

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2e^x-5=0\Leftrightarrow e^x=\frac{5}{2}\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{5}{2}\right)$. De même :

$$f'(x)>0\Leftrightarrow 2e^x-5>0\Leftrightarrow e^x>\frac{5}{2}\Leftrightarrow x>\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

On obtient le tableau de signe suivant pour la dérivée :

2. Calcul de

$$f(5/2)=e^{2\ln(5/2)}-5e^{\ln(5/2)}+4=e^{\ln(5/2)^2}-\frac{25}{2}+4$$

$$f(5/2)=\frac{25}{4}-\frac{50}{4}+\frac{16}{4}=-\frac{9}{4}$$

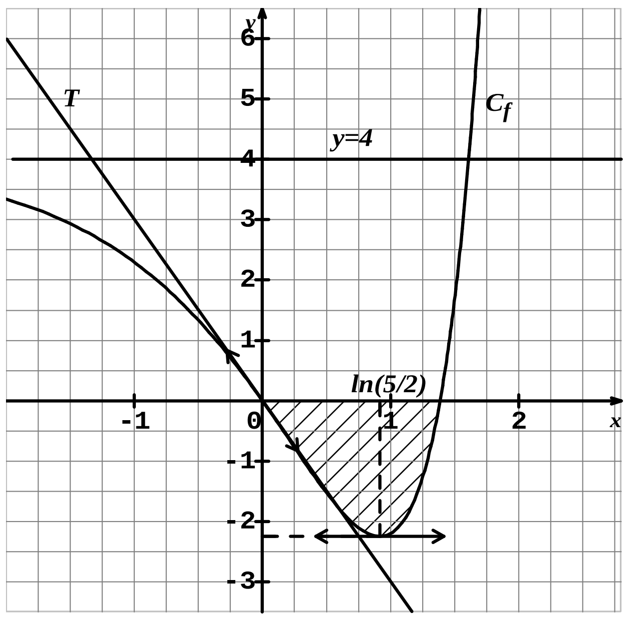
3. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$\ln 4$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	–	0	+	

4. On en déduit le tableau de signes suivant pour la fonction f :

x	$-\infty$		$\ln(5/2)$		$+\infty$
$2e^x-5$		$-$	0	+	
e^x		+		+	
$f'(x)$		$-$	0	+	
$f(x)$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

5. Représentation graphique



Partie D : calcul d'une aire

1. Soit *F* une primitive de f : $F(x)=\frac{e^{2x}}{2}-5e^x+4x$

2. a) Soit *I* l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[0;\ln 4]$:

$$I=\int_0^{\ln 4} f(x)dx=\int_0^{\ln 4}(e^{2x}-5e^x+4)dx=\left[\frac{e^{2x}}{2}-5e^x+4x\right]_0^{\ln 4}$$

$$I=\left(\frac{e^{2\ln 4}}{2}-5e^{\ln 4}+4\ln 4\right)-\left(\frac{e^0}{2}-5e^0\right)$$

$$I=\left(\frac{e^{\ln 16}}{2}-5\times 4+4\ln 4-\frac{1}{2}+5\right)=\left(4\ln 4-\frac{15}{2}\right)$$

On a montré dans la partie précédente que la fonction f est
négative sur l'intervalle $[0;\ln 4]$, donc l'aire est donnée en unités d'aires par :

$$A=-I=-4\ln 4+\frac{15}{2}=7{,}5-8\ln 2$$

2. b) L'unité d'aire est donnée par : $1u.a=2cm^2$ donc : $A=2\times(7{,}5-8\ln 2)=15-16\ln 2\approx 3{,}91cm^2$.