Problème 6

Partie I : Etude de la fonction f.

1. a) Limite en $+\infty$: on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2-5x+2\right)e^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2-5x+2\right)\times\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2-5x+2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2\right)=+\infty$**. De plus :** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$**. Donc :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

1. b) Limite en $-\infty$: En développant, on a : $f(x)=\left(2x^2-5x+2\right)e^x=2x^2e^x-5xe^x+2e^x$

Or : $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2e^x=0$ **;** $\lim\limits_{x\to-\infty} 5xe^x=0$ **et** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$**, donc** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

Donc la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ (axe des abscisses).

2. a) Calcul de la dérivée du produit $f(x)=\left(2x^2-5x+2\right)e^x$**: On pose** $u=\left(2x^2-5x+2\right)$ **et** $v=e^x$**. Donc :**

$u'=4x-5$ **et** $v'=e^x$ **,donc** $f'(x)=(4x-5)e^x+\left(2x^2-5x+2\right)e^x=\left(2x^2-x-3\right)e^x$

2. b) Etude du signe de $2x^2-x-3$**:** $\Delta=(-1)^2-4\times2\times-3=25$**. donc** $2x^2-x-3$ **admet 2 racines réelles distinctes :** $x_1=\dfrac{1-5}{2\times2}=-1$ **;** $x_1=\dfrac{1+5}{2\times2}=\dfrac{3}{2}$**. Pour tout x réel, on a** $e^x>0$ **donc**

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1 \quad et \quad x=1{,}5$

Le trinôme $2x^2-x-3$ **est du signe du coefficient devant** x^2**, donc positif, en dehors des racines.**

x	$-\infty$		**-1**		**1,5**		$+\infty$
$2x^2-x-3$		**+**	0	−	**0**	**+**	
e^x		**+**		**+**		**+**	
$f'(x)$		**+**	**0**	−	**0**	**+**	
$f(x)$	**0**	↗	$f(-1)$	↘	$f(1,5)$	↗	$+\infty$

2. c) $f(-1)=\left(2\times(-1)^2-5\times(-1)+2\right)e^{-1}=(2+5+2)e^{-1}=9e^1$ **et** $f(1{,}5)=\left(2\times(1{,}5)^2-5\times(1{,}5)+2\right)e^{1{,}5}=-e^{1{,}5}\approx-4{,}48$

3. a) Existence et unicité de la solution de l'équation $f(x)=2$ sur [2 ; 3] :

La fonction *f* est dérivable sur l'intervalle [2 ; 3]

La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle [2 ; 3] : $f(2)=0<2$ **et** $f(3)=100{,}4>2$ **.**

Donc l'équation $f(x)=2$ **<u>admet une solution unique</u> α sur l'intervalle [2 ; 3].**

On obtient les encadrements suivants pour α : $f(2{,}08)\approx1{,}74<2$ et $f(2{,}09)\approx2{,}02>2$, donc $2{,}08\le\alpha\le2{,}09$

4. voir graphique

Partie II: Calcul d'une intégrale.

1. Calcul de la dérivée du produit $F(x)=\left(2x^2-9x+11\right)e^x$:

On pose $u=2x^2-9x+11$ et $v=e^x$. Donc : $u=4x-9$ et $v'=e^x$.

$F'(x)=(4x-9)e^x+\left(2x^2-9x+11\right)e^x=\left(2x^2-5x+2\right)e^x=f(x)$ .Donc <u>*F* est une primitive de *f*</u>.

2. Calcul de l'intégrale I :

$$I=\int_{0,5}^{2} f(x)dx=\int_{0,5}^{2}\left(2x^2-5x+2\right)e^x dx=\left[\left(2x^2-9x+11\right)e^x\right]_{0,5}^{2}$$

$$I=\left(2\times2^2-9\times2+11\right)e^2-\left(2\times(0{,}5)^2-9\times0{,}5+11\right)e^{0{,}5}$$

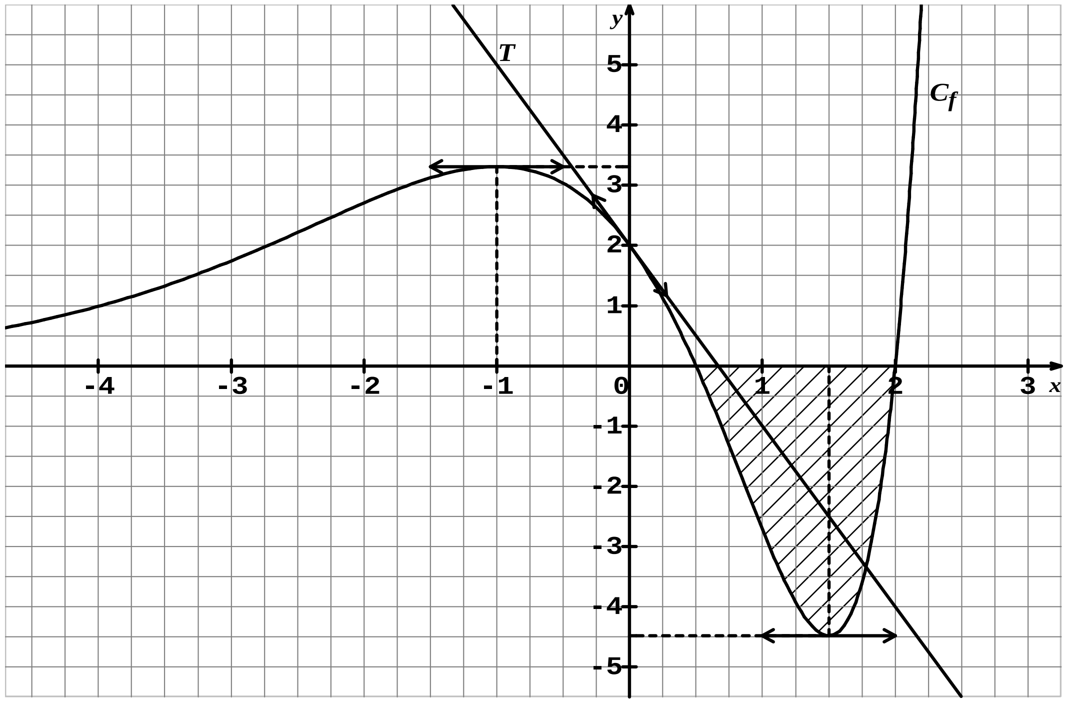
$$I=e^2-7e^{0{,}5}\approx-4{,}15$$

3. Interprétation graphique de l'intégrale : On a $f(0{,}5)=0$ et $f(2)=0$. D'après les variations de la fonction *f*, on en déduit que $f(x)$ est négatif sur [0,5 ; 2].

L'intégrale I est donc égale à l'opposée de l'aire (en unités d'aires) délimitée par la courbe , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0{,}5$ et $x=2$ (voir partie hachurée sur le graphique).

L'unité d'aire associée à ce repère est égale à : $1u.a=2\times2=4cm^2$

L'aire de ce domaine est donc égal à : $A=-4\left(e^2-7e^{0{,}5}\right)=28e^{0{,}5}-4e^2$



Problème 7

Partie A

1. a) Déterminons la limite de la fonction *f* en - $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$ Donc :

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

1. b) Montrons que si x est différent de zéro, on a : $f(x)=x^2e^{-x}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$:

Pour tout réel x différent de zéro, $f(x)=(x+1)^2e^{-x}=(x^2+2x+1)e^{-x}=x^2e^{-x}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=1$.

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. On en déduit que l'axe des abscisses est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction *f* au voisinage de $+\infty$.

2. a) Montrons que $f'(x)=(1-x^2)e^{-x}$: *f* est dérivable sur **R**. Elle est de la forme uv, avec : $u=(x+1)^2$ et $v=e^{-x}$. u et v sont deux fonctions dérivables sur **R** et on a : $u'=2(x+1)$ et $v'=-e^{-x}$

D'où, pour tout réel x, $f'(x)=2(x+1)e^{-x}-(x+1)^2e^{-x}=\left[2(x+1)-(x+1)^2\right]e^{-x}=(1-x^2)e^{-x}$

2. b) Etudions le signe de $f'(x)$:

Pour tout réel x, $e^{-x}>0$, donc $f'(x)$ est du signe de $(1-x^2)=(1-x)(1+x)$, s'annule en 1 et -1, est négatif sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$ et est positif sur $[-1;1]$. D'où : $f'(x)$ est négative sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$ et est positive sur $[-1;1]$.

Tableau de variation de la fonction f sur **R** : On a *f* (-1) = (-1 + 1)^{2}e$^{-(-1))}$ = 0 et *f* (1) = (1 + 1)^{2}e^{-1} = 4e^{-1}

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
e^x		+		+		+	

$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$4e^{-1}$	↘	0

3. Déterminons une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0 :

Une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0 est : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$, $f'(0)=1$

et $f(0)=1$. D'où : $y = 1\times(x-0)+1 = x+1$

4. a) $f(x)-(x+1)=(x+1)^2e^{-x}-(x+1)=(x+1)\left[(x+1)e^{-x}-1\right]=(x+1)e^{-x}(x+1-e^{x})$:

Pour tout réel x, on a : $f(x)-(x+1)=(x+1)e^{-x}\times g(x)$ avec $g(x)=x+1-e^{x}$

4. b) Calculons $g'(x)$: La fonction g est dérivable sur **R** et pour tout réel x, on a : $g(x)=1-e^{x}$

Etudions le signe de $g'(x)$: $g'(x)>0 \Leftrightarrow 1-e^{x}>0 \Leftrightarrow e^{x}<1 \Leftrightarrow x\ln e<\ln 1 \Leftrightarrow x<0$

car la fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$

Donc : $g'(x)>0$ sur $]-\infty;0[$, $g'(x)<0$ sur $]0;+\infty[$ et $g(0)=0$.

4. c) Dressons le tableau de variations de la fonction g :

De la question précédente, on en déduit que g est croissante sur $]-\infty;0[$ et décroissante sur $]0;+\infty[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	$4e^{-1}$	↘	0

4. d) D'après le tableau de variations précédent, la fonction g admet un maximum sur **R**. Ce maximum est

atteint en 0 et vaut 0. Donc, pour tout réel x, $g(x)\le 0$.

Déduisons-en le signe de $f(x)-(x+1)$: Pour tout réel x, on a : $f(x)-(x+1)=(x+1)e^{-x}\times g(x)$

Or, pour tout réel x $e^{-x}>0$, et $g(x)\le 0$. et $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$. Etudions le signe de $f(x)-(x+1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)-(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

D'où : $f(x)-(x+1)>0$ sur $]-\infty;-1[$, $f(x)-(x+1)<0$ sur $]-1;0[$ ou sur $]0;+\infty[$ et $f(x)-(x+1)=0$ en -1 et 0.

4. e) Déduisons-en la position de C_f par rapport à T : $f(x)-(x+1)>0$ sur $]-\infty;-1[$,donc C_f est au-dessus

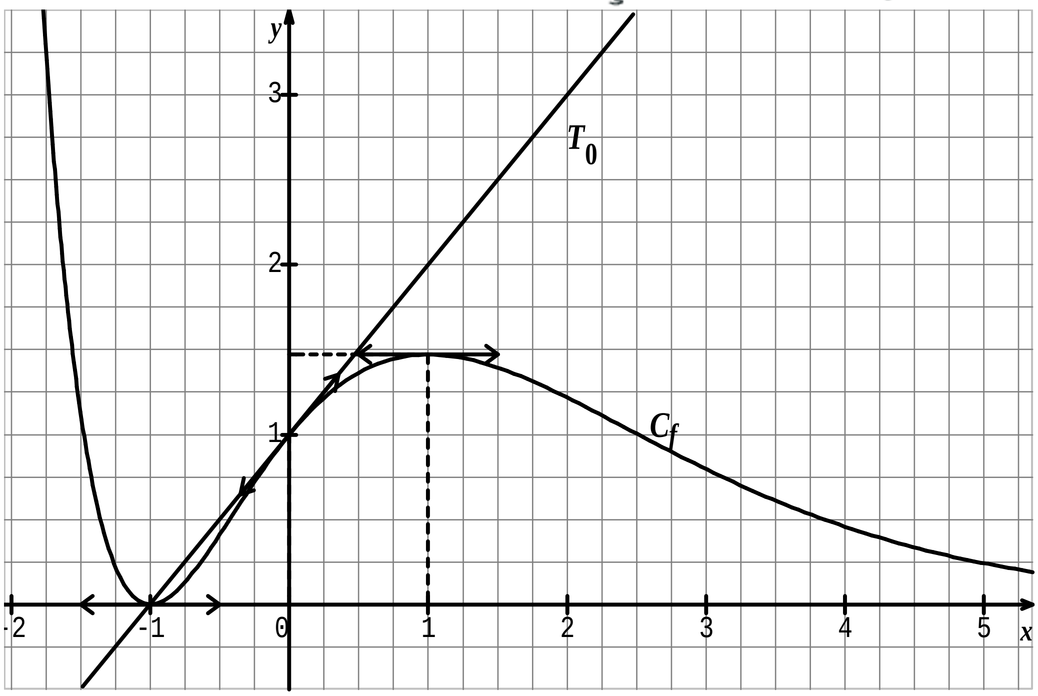
de T sur $]-\infty;-1[$, $f(x)-(x+1)<0$ sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ donc C_f est en dessous de T sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$,

T et C_f se coupent aux points d'abscisse -1 et 0.

5. Complétons le tableau :

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4	6
$f(x)$	7,39	0	0,41	1	1,36	1,47	1,22	0,80	0,46	0,12

Traçons C_f et T dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$:



Partie B

1.Pour tout réel x, $F(x)$ est dérivable. $F(x)=(-x^2-4x-5)e^{-x}$ .On pose : $u=-x^2-4x-5$. u est dérivable sur

R et $u'=-2x-4$; $v=e^{-x}$. v est dérivable sur **R** et $v'=-e^{-x}$

Donc : $F'(x)=(-2x-4)e^{-x}-(-x^2-4x-5)e^{-x}=(x^2+2x+1)e^{-x}=(1+x)^2e^{-x}=f(x)$

D'où : F est une primitive de f .

2. Sur [0 ; 3], $f(x)\geq 0$, donc l'aire cherchée est donnée par :

$I=\int_0^3 f(x)dx=[F(x)]_0^3=F(3)-F(0)\left(3^2-4\times 3-5\right)e^{-3}-\left(0^2-4\times 0,5-5\right)e^{-0}=26e^{-3}+5$ .Donc $\left(26e^{-3}+5\right)u.a$:

Or, 1 u.a. = 2 × 2 cm² = 4 cm², donc l'aire en cm² de la région du plan comprise entre les axes de coordonnées, la courbe C_f et la droite d'équation $x=3$ est égale à

$\left(26e^{-3}+5\right)u.a=4\left(26e^{-3}+5\right)cm^2\approx 14,82cm^2$, soit environ 14,82 cm² à 10^{-2} près.

Problème 8

Partie A

1. On pose : $u=4e^x$ et $v=e^x+2$ d'où : $u'=4e^x$ et $v'=e^x$ Donc :

$$g'(x)=a-\frac{4e^x(e^x+2)-4e^{2x}}{(e^x+2)^2}=a-\frac{4e^{2x}+8e^x-4e^{2x}}{(e^x+2)^2}=a-\frac{8e^x}{(e^x+2)^2}$$

2. La courbe passe par le point $E(\ln 2\,;\ln 2)$ donc : $g(\ln 2)=\ln 2$

$$a\ln 2+b-\frac{4e^{\ln 2}}{(e^{\ln 2}+2)}=\ln 2\Leftrightarrow a\ln 2+b-\frac{8}{4}=\ln 2\Leftrightarrow a\ln 2+b-2=\ln 2$$

La tangente à la courbe est parallèle à l'axe des abscisses au point E, donc le coefficient directeur de cette tangente est nul, donc : $g'(\ln 2)=0\Leftrightarrow a-\frac{8e^{\ln 2}}{(e^{\ln 2}+2)^2}=0\Leftrightarrow a-\frac{16}{4^2}=0\Leftrightarrow a-1=0\Leftrightarrow a=1$ .On réutilise ensuite la relation précédente entre *a* et *b* pour trouver *b* :

$a\ln 2+b-2=\ln 2\Leftrightarrow b-2=0\Leftrightarrow b=2$

La fonction *g* est donc donnée par : $g(x)=x+2-\frac{4e^x}{e^x+2}$

Partie B

1. On commence par faire apparaître l'expression $x+2$:

$$x-2-\frac{8}{e^x+2}=x+2-4+\frac{8}{e^x+2}=x-2+\frac{-4e^x-8+8}{e^x+2}=x-2-\frac{4e^x}{e^x+2}=f(x)$$

2. Limite en $-\infty$: on utilise la 1ère forme

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4e^x}{e^x+2}=\frac{4\times 0}{0+2}=0$. De plus : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)=-\infty$ Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Limite en $+\infty$: on utilise la 2ème forme

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x+2=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8}{e^x+2}=0$. De plus : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$ Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Montrons que la droite D_1 d'équation $y=x+2$ est asymptote en $-\infty$; on utilise la 1ère forme et on a :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4e^x}{e^x+2}=0$.Donc la droite D_1 d'équation $y=x+2$ est asymptote en $-\infty$ à la courbe

Montrons que la droite D_2 d'équation $y=x-2$ est asymptote en $+\infty$; on utilise la 2ème forme : Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8}{e^x+2}=0$ .Donc la droite D_2 d'équation $y=x-2$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe .

3. On utilise le résultat de la partie A pour calculer la dérivée, avec $a=1$:

$$f'(x)=1-\frac{8e^x}{\left(e^x+2\right)^2}=\frac{\left(e^x+2\right)^2-8e^x}{\left(e^x+2\right)^2}=\frac{\left(e^x-2\right)^2}{\left(e^x+2\right)^2}$$

4. Etude du signe de la fonction dérivée :

Une exponentielle étant toujours strictement positive, le dénominateur de la dérivée est strictement positif.

$f'(x)=0\Leftrightarrow e^x-2=0\Leftrightarrow e^x=2\Leftrightarrow x=\ln 2$. On obtient donc le tableau de signe de la dérivée $f'(x)$: .

.

On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$\left(e^x-2\right)^2$		+	0	+	
$\left(e^x+2\right)^2$		+		+	
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\ln 2$	↗	$+\infty$

5. Représentation graphique

Partie C

1. la fonction h est de la forme $\frac{u'}{u}=\frac{e^x}{e^x+2}$ dont une primitive est donnée par $\ln u$, avec $u=e^x+2$ donc $H(x)=\ln\left(e^x+2\right)$

2. On a : $f(x)=x+2+\frac{4e^x}{e^x+2}=x+2+4h(x)$ donc une primitive de f est donnée par :

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+2x+4H(x)=\frac{x^2}{2}+2x+4\ln(e^x+2)$$

3. L'unité d'aire associée au repère est égale à **1.u.a =2 × 2 = 4 cm²**. De plus, la fonction f est positive

sur l'intervalle [0 ; 2], donc l'aire est donnée par :

$$I=\int_0^2 f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^2=F(2)-F(0)=\left(\frac{2^2}{2}+2\times 2-4\ln(e^2+2)\right)-\left(4\ln 3\right)=2+4-4\ln(e^2+2)+4\ln 3$$

$$I=6-4\ln\left(\frac{e^2+2}{3}\right) \qquad . \qquad A=4\times I=4\left(6-\ln\left(\frac{e^2+2}{3}\right)\right)cm^2$$

Problème 9

1. $g(x)=e^{x}(x-2)-1$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2. a. $g'(x)=e^{x}(x-2)+e^{x}=e^{x}(x-1)$, or on sait que $e^{x}>0$, donc $f'(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

b.

x	0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$x-1$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
e^{x}	$+$ $\quad$ $+$
$g'(x)$	$-$ $\quad$ $+$
$g(x)$	-3 $\searrow$ $-e-1$ $\nearrow$ $+\infty$

3. $g(x)=0$:

La fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$, donc elle est strictement croissante sur

l'intervalle $[1;3]\subset[1;+\infty[$, et on a $f(1)=-e-1<0$ et $f(3)=e-1>0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha)=0$ et $1\le\alpha\le3$.

A l'aide de la calculatrice on trouve $2{,}1\le\alpha\le2{,}2$.

On sait que $g(\alpha)=e^{\alpha}(\alpha-2)-1=0 \Rightarrow e^{\alpha}(\alpha-2)=1 \Rightarrow e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-2}$.

x	0 $\quad$ α $\quad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

Partie B

1. $$f(x)=\frac{e^{x}+1}{e^{x}+x}=\frac{e^{x}\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)}{e^{x}\left(1+\frac{x}{e^{x}}\right)}=\frac{\left(1+e^{-x}\right)}{\left(1+xe^{-x}\right)}$$, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{1+0}{1+0}=1$

On déduit que la droite d'équation $y=1$est asymptote horizontale à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

2. $f(x)-1=\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}+x}-1=\dfrac{e^{x}+1-e^{x}-x}{e^{x}+x}=\dfrac{1-x}{e^{x}+x}$, $e^{x}+x>0$ sur R + donc le signe de $f(x)-1$dépend du signe

$1-x$.

Donc si $1-x>0 \Rightarrow x<1$ et la courbe C est au dessus de D sur $]0;1[$

Si $1-x<0 \Rightarrow x>1$ et la courbe C est en dessous de D sur $]1;+\infty[$.

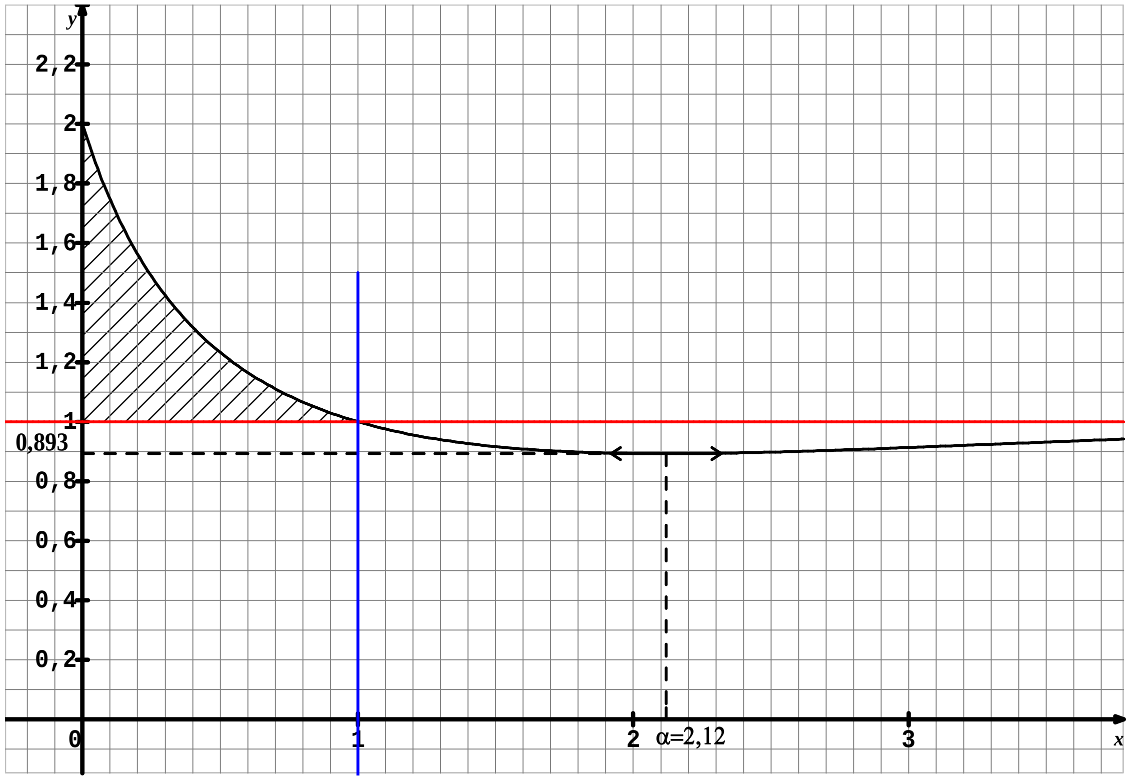
$$f'(x)=\frac{e^{x}\left(e^{x}+x\right)-\left(e^{x}+1\right)\left(e^{x}+1\right)}{\left(e^{x}+x\right)^{2}}=\frac{e^{2x}+xe^{x}-e^{2x}-2e^{x}-1}{\left(e^{x}+x\right)^{2}}=\frac{(x-2)e^{x}-1}{\left(e^{x}+x\right)^{2}}=\frac{g(x)}{\left(e^{x}+x\right)^{2}}.$$

x	0 $\quad$ α $\quad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$2 \searrow f(\alpha)$	$\nearrow$

$$f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}+1}{e^{\alpha}+\alpha}=\frac{\frac{1}{\alpha-2}+1}{\frac{1}{\alpha-2}+\alpha}=\frac{\frac{1+\alpha-2}{\alpha-2}}{\frac{1+\alpha(\alpha-2)}{\alpha-2}}=\frac{\alpha-1}{\alpha^2-2\alpha+1}=\frac{\alpha-1}{(\alpha-1)^2}=\frac{1}{\alpha-1}$$, puisque $\alpha\neq 1$.

Partie C



$f(x)=\frac{e^x+1}{e^x+x}$, on pose $u(x)=e^x+x$, $u'(x)=e^x+1$, donc $f(x)$ s'écrit sous la forme $\frac{u'}{u}$, d'après le formulaire, on obtient : $F(x)=\ln(u(x))=\ln\left(e^x+x\right)$ est une primitive de $f(x)$ sur R.

$B=\left(\int_0^1 f(x)dx\right)u.a=25\left[F(x)\right]_0^1=25\times\left(F(1)-F(0)\right)=25\left(\ln(e^1+1)-\ln(e^0)\right)=25\ln(e+1)=32,83$.