Problème 6

Partie I : Etude de la fonction f.

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x)=(2x^2-5x+2)e^x$. On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$ (on donne $\lim\limits_{x\to 0} x^2e^x=0$).

   En déduire l'existence d'une asymptote dont on précisera l'équation.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

   a) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x)=(2x^2-x-3)e^x$.

   b) Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

   c) Donner le tableau des variations de la fonction f (préciser la valeur exacte de chaque extremum).

3. a) Montrer que l'équation $f(x)=2$ possède une unique solution α dans l'intervalle [2 ; 3].

   b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du nombre α.

4. Tracer la courbe C_f et placer son point A d'abscisse α.

Partie II: On désigne par F la fonction définie sur **R** par $F(x)=\left(2x^2-9x+11\right)e^x$.

Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur **R**.

2. Calculer l'intégrale $I=\int_{0,5}^{2} f(x)dx$. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

Problème 7

On considère la courbe C_f représentant la fonction f définie sur **R** par $f(x)=(1+x)^2e^{-x}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (unité graphique 2 cm).

Partie A

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

   b) Montrer que si x est différent de zéro on a : $f(x)=x^2e^{-x}\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$

   En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. a) Montrer que $f'(x)=(1-x^2)e^{-x}$.

   b) Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur **R**

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

4. Etude de la position C_f par rapport à T.

   a) Montrer que pour tout réel x on a : $f(x)-(x+1)=(x+1)e^{-x}\times g(x)$ avec $g(x)=x+1-e^x$

   b) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

   c) En déduire le signe de $g(x)$, puis de $f(x)-(x+1)$. En déduire la position de C_f par rapport à T .

5. Après avoir complété le tableau de valeurs ci-dessous, tracer T et C_f dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Donner les valeurs de $f(x)$ arrondies à 10^{-2} près.

x	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2	3	4	6
$f(x)$										

Partie B

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x)=\left(-x^2-4x-5\right)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f .

2. Calculer l'aire en cm² de la région du plan comprise entre les axes de coordonnées, la courbe C_f et la
droite d'équation $x=3$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

Problème 8

(Les trois parties du problème peuvent être résolues indépendamment.)

Partie A : ln désigne la fonction logarithme népérien. On note E le point de coordonnées (ln 2 ; ln 2).

Soient a et b deux nombres réels, on désigne par *g* la fonction définie sur **R** par :
$g(x)=ax+b-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$.

1. Calculer la dérivée de *g*.
2. Déterminer *a* et *b* pour que la courbe représentative de *g* passe par le point E et admette en ce point une
tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Partie B : On se propose d'étudier la fonction numérique f définie sur **R** par : $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$

Soit C_f la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que pour tout nombre réel x on a : $f(x)=x-2+\dfrac{8}{e^x+2}$.
2. En utilisant des formes de $f(x)$, calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Montrer que les droites D_1 d'équation $y=x-2$ et D_2 d'équation $y=x+2$ sont asymptotes à la courbe C_f.
4. Montrer que la dérivée de f est $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-2}{e^x+2}\right)^2$.
5. Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f .
6. Construire la courbe C_f , sa tangente en E et ses asymptotes.

Partie C

1. Déterminer une primitive de la fonction h définie sur R par $h(x)=\dfrac{e^x}{e^x+2}$. En déduire une primitive de f .
2. Déterminer en cm², en valeur exacte puis au mm² près, l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe
C_f , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=2$.

Problème 9

Le plan *P* est rapporté au repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (L'unité graphique est 5 cm.).Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x+x}$. On note *C* la courbe représentative de la fonction f dans le plan P .

I - Étude d'une fonction auxiliaire

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $g(x)=e^x(x-2)-1$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

2. Étude des variations de g

a) Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g et étudier son signe sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

3. Résolution de l'équation $g(x)=0$

a) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ possède une unique solution, notée α, appartenant à l'intervalle $[1;3]$.

b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

c) vérifier que $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-2}$ (on pourra utiliser $g(\alpha)=0$)

4. Déterminer le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$.

II - Étude de la fonction f

1. Étude de la limite en $+\infty$.

a) Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}}$

b) En déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.

2. Étudier la position relative de la courbe C et de la droite D d'équation $y=1$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

3. Étude des variations de f

a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^{x}+x)^{2}}$ où g est la fonction définie en 1.

b) Déduire de la question I.4., le sens de variations de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

c) Calculer $f(\alpha)$ en fonction de α et montrer que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$.

4. Construire la courbe *C* et la droite *D* dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

III - Calcul d'aire

On note B l'aire, exprimée en cm^2 du domaine limitée par la courbe C , la droite D , l'axe des ordonnées et la droite d'équation *x* = 1.

1. Hachurer sur le graphique le domaine B.
2. Déterminer une primitive *F* de la fonction *f* sur l'intervalle [0 ; +∞[.
3. En déduire la valeur exacte de B, puis une valeur approchée arrondie au mm^2.

Problème 10

Soit la fonction définie par $\begin{cases}\forall x\in\,]-\infty;0[,\ f(x)=e^{\frac{1+x}{x}}\\ \forall x\in,]0;+\infty[\ f(x)=\dfrac{-x}{2}+3+\dfrac{2\ln x-1}{x}\end{cases}$

Partie 1

1) Soit g la fonction définie sur R^* par $g(x)=e.e^{\frac{1}{x}}$

a)Etudier la variation de g

b) Donner le signe de g sur R^*

2) Soit h la fonction définie sur R^* par $h(x)=-x^2+6-4\ln x$

a)Calculer les limites de h en 0 et en $+\infty$ et interpréter si possible le résultat

b) Etudier les variations de h sur $]0;+\infty[$

3-a)Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique β et que $1,86 \leq \beta \leq 1,87$

b) Déterminer le signe de h $]0;+\infty[$

c) Calculer $h(e)$ puis $\left(h^{-1}\right)'\left(-e^2+2\right)$.Dresser le tableau de variation de $\left(h^{-1}\right)$ sans l'avoir étudié puis en déduire son signe.

Partie 2

Soit f la fonction définie plus haut et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J).

1-a)Montrer que $\forall x \in]-\infty;0[$, $f(x)=g(x)$

b) Déterminer les limites de f à droite en 0 et $+\infty$ en puis donner une interprétation des résultats

2-a)Calculer la dérivée f' de f et montrer que $\forall x \in]-\infty;0[$, $f'(x)$ et $h(x)$ ont le même signe.

b) En déduire le sens de variation et le tableau de variation de f

3) Montrer que $f(\beta)=-\beta+\dfrac{2}{\beta}+3$ et en déduire un encadrement de $f(\beta)$

4-a)Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=\dfrac{-1}{2}x+3$ est asymptote à (C_f)

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de (Δ) et de (C_f)

c) Etudier la position de (Δ) par rapport à (C_f) sur $]0;+\infty[$

5) Déterminer les coordonnées du point B de la courbe (C_f) où la tangente (T) à (C_f) est parallèle à la droite (Δ)

6) Construire (C_f) les droites (T) et (Δ) dans le repère (O,I,J).

7) Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équation, $x=\sqrt{e}$ et $x=e$, la courbe (C_f) et l'asymptote (Δ)