

Problème 15

$$f(x) = (x-1)(2 - e^{-x}).$$

1. a. En $+\infty$, $x-1$ tend vers $+\infty$ et $2 - e^{-x}$ tend vers 2 car e^{-x} tend vers 0 ; f a pour limite $+\infty$.
- b. $f(x) - (2x-2) = (x-1)(2 - e^{-x}) - 2(x-1) = (x-1)(-e^{-x})$: avec les croissances comparées, e^{-x} emmène tout le monde vers 0, la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est bien asymptote à C .
- c. Signe de $f(x) - (2x-2) = -(x-1)e^{-x}$: lorsque $x \leq 1$ c'est positif, donc C est au-dessus de Δ ; lorsque $x \geq 1$ c'est négatif, donc C est en dessous de Δ .

3. a.

$$f'(x) = (x-1)'(2 - e^{-x}) + (x-1)(2 - e^{-x})' = 2 - e^{-x} + (x-1)e^{-x} = 2 - 2e^{-x} + xe^{-x}$$

d'où

$$f'(x) = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x}).$$

b. Comme x est positif, $xe^{-x} > 0$ et

$$x > 0 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow e^{-x} < e^0 = 1 \Rightarrow e^{-x} - 1 < 0 \Rightarrow 1 - e^{-x} > 0 \text{ donc } f' \text{ est positive.}$$

$$c. f'(0) = 0 + 2(1-1) = 0.$$

x	0	$+\infty$
f'	0	+
f	-1	$+\infty$

2. Comme $x \geq 1$ il faut calculer $-\int_1^3 (x-1)e^{-x} dx$: on pose $\begin{cases} u = x-1 \\ v' = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = -e^{-x} \end{cases}$ d'où

$$\int_1^3 (x-1)e^{-x} dx = \left[-(x-1)e^{-x} \right]_1^3 - \int_1^3 -e^{-x} dx = -2e^{-3} - \left[e^{-x} \right]_1^3 = -2e^{-3} - [e^{-3} - e^{-1}] = e^{-1} - 3e^{-3}.$$

Comme l'unité d'aire est de 2 cm x 2 cm, soit 4 cm², on a donc $(e^{-1} - 3e^{-3})4 \approx 0,87$ cm².

3. a. La tangente à C est parallèle à Δ lorsque $f'(x) = 2$: mêmes coefficients directeurs ; on a donc

$$f'(x) = xe^{-x} + 2 - 2e^{-x} = 2 \Leftrightarrow xe^{-x} - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow (x-2)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 2. \text{ Le point A a pour coordonnées 2 et } f(2) = (2-1)(2 - e^{-2}) = 2 - e^{-2}.$$

b. La distance du point A à la droite $ax + by + c = 0$ est $\frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; ici Δ a pour équation

$$\text{cartésienne } 2x - y - 2 = 0 \text{ d'où notre distance est } \frac{|2 \cdot 2 - (2 - e^{-2}) - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{e^{-2}}{\sqrt{5}}, \text{ soit en cm : } 2 \frac{e^{-2}}{\sqrt{5}}.$$

Problème 16

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. $g(x) = e^x - 1$ est positive lorsque $x \geq 0$; $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$: comme g est décroissante avant 0 et croissante après, g est toujours positive.
2. Comme $g(x) \geq 0$, on a $e^x - x \geq 1 \Rightarrow e^x - x > 0$ (ceci montre que f est définie sur $\mathbb{R}$).

Partie B

$$1. a. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} = \frac{1}{+\infty} = 0 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} = \frac{1}{0-1} = -1.$$

b. On a une asymptote horizontale en $-\infty$: $y = -1$ et une autre en $+\infty$: $y = 0$.

$$2. a. f'(x) = \frac{1(e^x - x) - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x - x - xe^x + x}{(e^x - x)^2} = \frac{(1-x)e^x}{(e^x - x)^2}.$$

b. f est du signe de $1-x$.

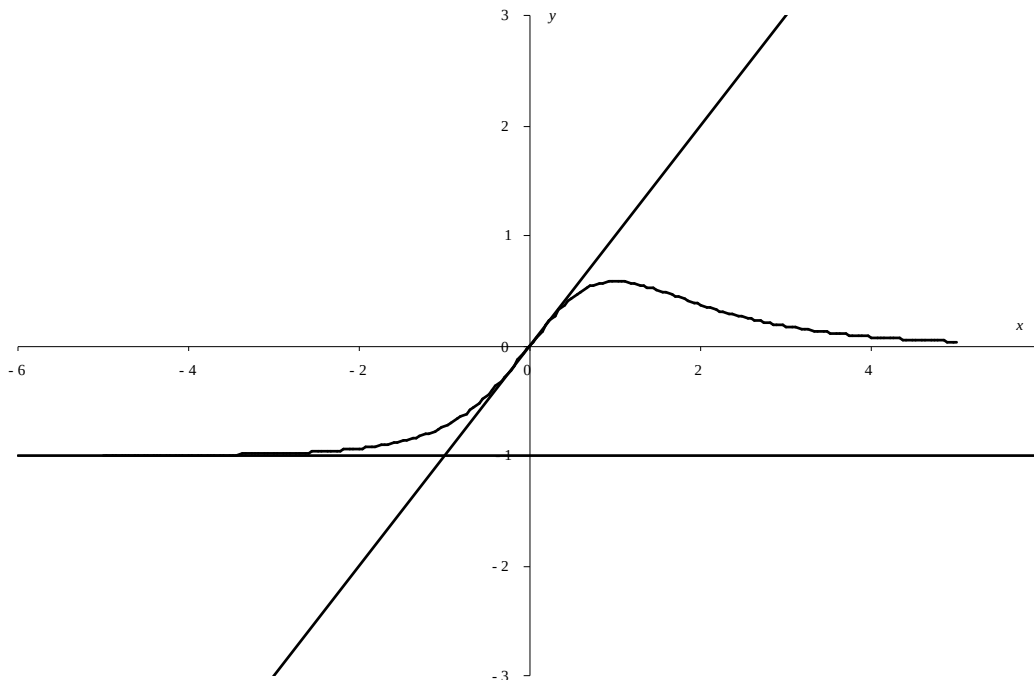
$$3. a. y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = x.$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	+	0	-
f	-1		0

b. $f(x) - x = \frac{x}{e^x - x} - x = \frac{x - xe^x + x^2}{e^x - x} = \frac{-x(e^x - x - 1)}{e^x - x} = \frac{-xg(x)}{e^x - x}$.

Comme g est positive, ainsi que $e^x - x$, $f(x) - x$ est du signe de $-x$, soit positif avant 0 (C est au-dessus de T), négatif après (C est en dessous de T).

4.



Problème 18

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$.

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
φ'	-	0	+	0	-
φ	$+\infty$	0	$3/e - 1$	0	-1

A

1. a. En $-\infty$ la fonction se comporte comme $x^n e^x$ en $+\infty$, sa limite est donc $+\infty$. En $+\infty$ elle se comporte comme $x^n e^x$ en $-\infty$ ce qui donne $0 - 1 = -1$.

b. $\varphi'(x) = (2x + 1)e^{-x} - (x^2 + x + 1)e^{-x} = (x - x^2)e^{-x} = x(1 - x)e^{-x}$. On fait éventuellement un tableau de signes pour $x(1 - x)$ ou on se rappelle du signe du trinôme ; l'exponentielle est toujours > 0 .

2. La fonction φ s'annule évidemment en 0 et comme $\varphi(0) = 0$ elle reste positive de $-\infty$ jusqu'à 1. De 1 à $+\infty$ elle est continue, monotone strictement décroissante vers $\left[-1; \frac{3}{e} - 1\right]$; comme $\frac{3}{e} - 1 > 0$, 0

appartient à l'intervalle image φ s'annule donc bien sur $[1; +\infty[$.

A la calculatrice on trouve $\varphi(1,78) \approx 0,003$ et $\varphi(1,79) \approx -0,0008$.

3. On a dit que φ était positive jusqu'à 1 ; après comme φ est décroissante, si $x \leq \alpha$ alors $\varphi(x) \geq \varphi(\alpha) = 0$ et si $x \geq \alpha$, $\varphi(x) \leq \varphi(\alpha) = 0$.

Partie B : Etude de la position relative de deux courbes et calcul d'aire.

$$f(x) = (2x+1)e^{-x} \text{ et } g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

1. Même tangente = passent par le même point A et en cet endroit ont même nombre dérivé. Il faut donc calculer f' et g' . Il est immédiat que $f(0) = g(0) = 1$

$$f'(x) = 2e^{-x} - (2x+1)e^{-x} = (2x+1)e^{-x} \Rightarrow f'(0) = 1 ; g'(x) = \frac{2(x^2+x+1) - (2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \Rightarrow g'(0) = 1.$$

$$2. a. f(x) - g(x) = (2x+1)e^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = (2x+1) \left(e^{-x} - \frac{1}{x^2+x+1} \right) = \frac{(2x+1)[(x^2+x+1)e^{-x} - 1]}{x^2+x+1}.$$

b. Par rapport au signe de φ il faut faire intervenir celui de $2x+1$ et celui de x^2+x+1 ; or ce trinôme a un discriminant négatif, il est toujours du signe de 1, soit > 0 .

c. Lorsque $f - g$ est positive, C_f est au dessus de C_g , c'est donc lorsque $x \in \left[-\frac{1}{2}; \alpha \right]$. Ailleurs C_f est en dessous de C_g .

x	$-\infty$	$-1/2$	0	α	$+\infty$
$2x+1$	-	0	+	+	+
$\varphi(x)$	+		+	0	-
$f(x)$	-	0	+	0	-

$$3. a. h'(x) = -2e^{-x} - (-2x-3)e^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = (2x+1)e^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = f(x) - g(x).$$

N'oubliez pas que la dérivée de $\ln u$ est $u' / u \dots$

b. Attention quand même au signe : sur $\left[-\frac{1}{2}; 0 \right]$ on a bien $f(x)$ supérieur à $g(x)$, on calcule donc

$$\text{simplement } \int_{-1/2}^0 f(x) - g(x) dx = [h(x)]_{-1/2}^0 = h(0) - h(-1/2) = -3 + 2\sqrt{e} + \ln(3/4) \approx 0,0098 \text{ en unités d'aire.}$$

Problème 19

On considère les deux courbes (C_1) et (C_2) d'équations respectives $y = e^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan. Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente T commune à ces deux courbes. Tracé approximatif d'une telle tangente à l'aide d'une règle : cf. graphique.

-Abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe (C_1) : $a \approx 0,8$;

-Abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe (C_2) : $b \approx -1,2$;

On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point d'abscisse a de la courbe (C_1) et par B le point d'abscisse b de la courbe (C_2) .

Une équation de la tangente (T_A) à la courbe (C_1) au point A : $(T_A) : y = f'(a)(x-a) + f(a)$ où

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x ; \text{Donc : } (T_A) : y = e^a(x-a) + e^a = e^a x + e^a(1-a).$$

Une équation de la tangente (T_B) à la courbe (C_2) au point B : $(T_B) : y = g'(b)(x-b) + g(b)$ où

$$g(x) = -x^2 - 1 \Rightarrow g'(x) = -2x ; \text{Donc : } (T_B) : y = -2b(x-b) - b^2 - 1 = -2bx + b^2 - 1.$$

Les droites (T_A) et (T_B) sont confondues $\Leftrightarrow$ les réels a et b sont solutions du système (S) :

$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases}.$$

$(T_A) = (T_B) \Leftrightarrow$ elles ont la même équation réduite

$\Leftrightarrow$ elles ont le même coefficient directeur p et la même ordonnée à l'origine q

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_{T_A} = p_{T_B} \\ q_{T_A} = q_{T_B} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ e^a(-a+1) = b^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases} ; \text{CQFD !}$$

d-Le système (S) est équivalent au système (S') : $\begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}.$

$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2}e^a \\ e^a - ae^a = \left(-\frac{1}{2}e^a\right)^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2}e^a \\ e^a - ae^a = \frac{1}{4}e^{2a} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases} ; \text{CQFD !}$$

Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation (E) :

$$e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 0.$$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4$.

Pour tout x appartenant à $]-\infty ; 0[$, $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x-1) < 0$.

$-x < 0 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow e^{2x} < 1 \Rightarrow e^{2x} - 4 < -3 \Rightarrow e^{2x} - 4 < 0$; $-x < 0 \Rightarrow x - 1 < 0$ et comme $4e^x > 0$, $4e^x(x-1) < 0$.

b-L'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty ; 0[$: (E) :

$$e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow (e^{2x} - 4) + 4e^x(x-1) = 0 ;$$

Or pour $x < 0$, $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x-1) < 0$ donc $(e^{2x} - 4) + 4e^x(x-1) < 0$;

L'équation (E) n'a donc pas de solution dans l'intervalle $]-\infty ; 0[$; CQFD !

c-La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et :

$$f'(x) = 2e^{2x} + 4(1 \times e^x + x \times e^x) - 4e^x = 2e^{2x} + 4xe^x = 2e^x(e^x + 2x) ;$$

Comme $e^x > 0$ et que $x \geq 0$, il est clair que $f'(x) > 0$; f est donc strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$; CQFD !

d-L'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$: Remarquons d'abord que

$$(E) \Leftrightarrow f(x) = 0 ;$$

Or f est définie, continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$; elle réalise donc

une bijection de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ sur l'intervalle $\left[f(0) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$.

Or $f(0) = -7$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(e^x + 4x - 4) - 4 = +\infty$ (car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x - 4 = +\infty$). f réalise donc une bijection de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ sur l'intervalle $[-7 ; +\infty[$.

Comme $0 \in [-7 ; +\infty[$, il admet donc un unique antécédent a par f dans $[0 ; +\infty[$;

L'équation (E) admet donc bien une solution unique dans l'intervalle $[0; +\infty[$, à savoir a ; CQFD !

Un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a : $f(0,84) \approx -0,11 < 0$ et $f(0,85) \approx 0,07 > 0$ donc , f étant

croissante sur $[0; +\infty[$, $0,84 < a < 0,85$. On prend pour A le point d'abscisse a . Un encadrement

d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites (T_A) et (T_B) sont confondues. $(T_A) = (T_B) \Leftrightarrow (a ;$

$b)$ solution du système (S) (cf. 2.c.)

$$\Leftrightarrow (a ; b) \text{ solution du système (S')} : \begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases} \quad (\text{cf. 2. d.})$$

$$\Leftrightarrow (a ; b) \text{ solution du système : } \begin{cases} e^a = -2b \\ f(a) = 0 \end{cases} \quad (\text{cf. 3.}) \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ a = \alpha \end{cases} \quad (\text{cf. 3.b. et 3.d.}) \Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha \\ b = -\frac{1}{2}e^\alpha \end{cases} \quad (\text{cf.}$$

$$\text{3.b. et 3.d.) Or } 0,84 < a < 0,85 \Rightarrow e^{0,84} < e^a < e^{0,85} \Rightarrow -\frac{1}{2}e^{0,85} < -\frac{1}{2}e^a < -\frac{1}{2}e^{0,84} \Rightarrow -1,2 < b < -1,1.$$

