Problème 11

Partie A

On considère la fonction numérique f définie par : $\forall x \in R,\ f(x)=e^{-2x}+ae^{-x}+b$ où a et b sont des réels.

On appelle (C_f) e la courbe représentative de f dans le plan (P) muni du repère orthogonal (O,I,J)

Déterminer a et b pour la courbe (C_f) passe par le point A de coordonnées $(-\ln 3;1)$ et possède en ce point une tangente de coefficient directeur -6.

Partie B

Soit la fonction numérique f définie sur R par : $f(x)=(e^{-x}-2)^2$ et (C_f) le tracé représentatif dans le plan (P)

1-a)Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$ puis déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote horizontale (Δ) que l'on précisera

b) Calculer les coordonnées du point d'intersection B de la courbe (C_f) et de la droite (Δ)

2) Soit f' la dérivée de f sur R

-Etablir que $f(x)=-2e^{-x}(e^{-x}-2)$ et détermine son signe.

-Etablir le tableau de variation de la fonction f.

3) Calculer les coordonnées de E, point d'intersection de la courbe (C_f) et de l'axe des ordonnées.

-Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) en ce point tout en précisant la position de la courbe (C_f) par rapport à la tangente (T).

4) Tracer dans le plan (P) les droites (Δ) et (T) ainsi que la courbe (C_f).

5) Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équation, $x=-1$ et $x=1$, la courbe (C_f) et l'axe des abscisses

Problème 12

Le plan p est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\ \vec{j})$ d'unités graphiques 4 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.

On s'intéresse dans ce problème a la fonction f définie sur l'ensemble R des nombres réels par $f(x)=\dfrac{3}{e^{3x}+1}$.On note C la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O;\vec{i},\ \vec{j})$.

Partie A : Etude de la fonction f

1. a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers ∞.

b) En déduire que la courbe C admet un asymptote que l'on précisera.

c) Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout nombre réel x; qu'en déduit-on sur la position de la courbe C par rapport a cette asymptote ?

2. On considère la droite D d'équation $y=3$

Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

En Déduire que courbe C admet la droite D comme asymptote.

Montrer que, pour tout nombre réels $x,\ f'(x)=3-\dfrac{-9e^{3x}}{e^{3x}+1}$

En déduire la position la position relative de la courbe C et de la droite D.

3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

a) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x)=\dfrac{-9e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}$

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur R, puis dresser son tableau de variation.

4) Dans le plan P muni du repère $(O;\vec{i},\ \vec{j})$ tracer les droites (D) et (Δ) ainsi que la courbe (C).

PARTIE B : Calcul de l'aire d'une partie du plan

a) On considère la fonction g définie sur R par g (x) = $\dfrac{3e^{3x}}{e^{3x}+1}$

Déterminer une primitive G, de la fonction g su R. *(On pourra remarquer que la fonction g sur R de la forme* $\dfrac{u^1}{u}$ *est une fonction que l'on précisera).*

b) En utilisant la question 2.c, de la partie A, déterminer une primitive F de la fonction f sur R.

2. Soit a un réel strictement positif. On note A (a) la mesure, exprimé en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan F comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses; et les droites d'équations $x=0$ et $x=a$

a) Exprimer $A(a)$ à l'aide d'une intégrale.

b) Etablir que $A(a)=3a-\ln\left(e^{3a}+1\right)+\ln 2$

c) En remarquant que $3a=\ln\left(e^{3a}\right)$), écrire $A(a)$ sous la forme du logarithme népérien d'un quotient déterminer alors 1a limite de $A(a)$, lorsque a tend vers + ∞.

Dans cette question particulièrement, toute trace de recherche, même incomplète, figurant sur fa copie sera prise en compte dans l'évaluation.

Problème 13

Partie A

On considère la fonction de R vers R définie par : $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$

1-Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition

2- a) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation

b) Calculer $f(-1)$ puis en déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

c) Démontrer que le point $\Omega(1;-1)$ est un centre de symétrie de (C) où (C) est la courbe de f dans le repère orthonormé (O,I,J) unité : 1cm

3) Construire la courbe (C)

Partie B

Soit g la fonction définie de R vers R par : $g(x)=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$

1)a) Donner l'ensemble de définition D_g de g

b) Vérifier que $g(x)=f\left(e^x\right),\forall x\in D_g$

c) En utilisant la question 2) b de la partie A, donner le signe de $g(x)$ suivants les valeurs de g

2) Déterminer les limites de $g(x)$ aux bornes de son ensemble de définition.

b) Etudier $g(x)$ puis dresser le tableau de variation

c) Vérifier le résultat du signe de $g(x)$ trouvé au 1) avec le tableau de variation

3) Tracer la courbe (C_g) de dans le même repère (O,I,J)

Partie C

On pose $h(x)=1+\dfrac{2e^x}{1-e^x}$

1) Vérifie que $h(x)=g(x)$

2) Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\left(C_g\right)$, l'axe $\left(OI\right)$ et les droites respectives $x=-\ln 4, x=-\ln 2$

Problème 14

Soient *f* et *g* les fonctions définies sur l'ensemble R des nombres réels par : $f(x)=xe^{1-x}$ et $g(x)=x^2e^{1-x}$.

Les courbes représentatives des fonctions *f* et *g* dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ sont respectivement notées (C_f) et $\left(C_g\right)$. leur tracé est donné ci-dessous.

1. Étude des fonctions *f* et *g*

a. Déterminer les limites des fonctions *f* et *g* en $-\infty$.

b. Justifier le fait que fonctions *f* et *g* ont pour limite 0 en $+\infty$.

c. Étudier le sens de variations de chacune des fonctions *f* et *g* et dresser leurs tableaux de variations respectifs.

2. Calcul d'intégrales

Pour tout entier naturel *n*, on définit l'intégrale I_n par : $I_0=\int_0^1 e^{1-x}dx$ et, si $n > 1$, $I_n=\int_0^1 x^ne^{1-x}dx$.

a. Calculer la valeur exacte de I_0.

b. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel *n* :
$I_{n+1}=-1+\left(n+1\right)I_n$.

c. En déduire la valeur exacte de I_1, puis celle de I_2.

3. Calcul d'une aire plane

a. Étudier la position relative des courbes (C_f) et $\left(C_g\right)$.

b. On désigne par A l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes (C_f) et $\left(C_g\right)$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x=0$ *et* $x=1$.

En exprimant A comme différence de deux aires que l'on précisera, démontrer l'égalité : A = 3 − *e*.

4. Étude de l'égalité de deux aires

Soit *a* un réel strictement supérieur à 1.

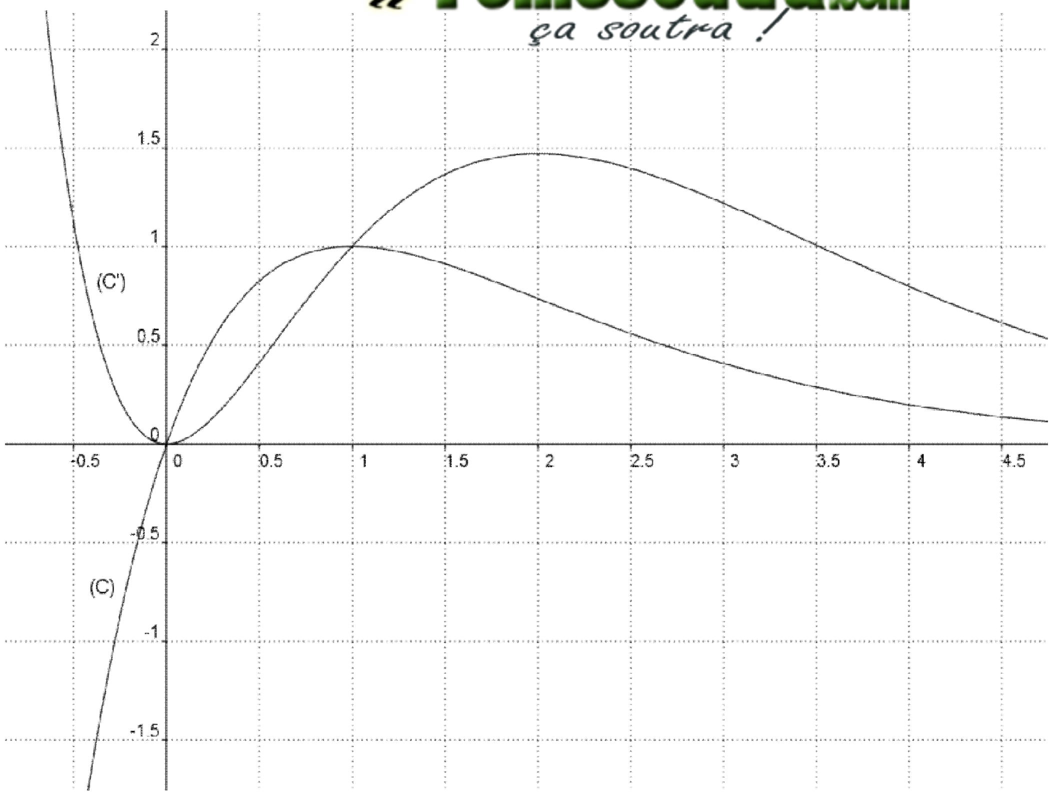
On désigne par $\mathrm{S}(a)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes (C_f) et $\left(C_g\right)$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.

On admet que $\mathrm{S}(a)$ s'exprime par : $\mathrm{S}(a)=3-e^{1-a}\left(a^2+a+1\right)$.

L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe une et une seule valeur de *a* pour laquelle les aires A et $\mathrm{S}(a)$ sont égales.

a. Démontrer que l'équation $\mathrm{S}(a)=\mathrm{A}$ est équivalente à l'équation : $e^a=a^2+a+1$.

b. Conclure, quant à l'existence et l'unicité du réel *a*, solution du problème posé.



Problème 15

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x)=(x-1)\left(2-e^{-x}\right)$.

Sa courbe représentative (C_f) est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2 cm).

1. a. Étudier la limite de f en $+\infty$.

b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à (C_f).

c. Étudier la position relative de C et Δ.

2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=xe^{-x}+2(1-e^{-x})$.

b. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) > 0$.

c. Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f.

3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm², du domaine plan limité par la courbe (C_f), la droite Δ et les droites d'équations $x=1$ *et* $x=3$.

4. a. Déterminer le point A de (C_f) où la tangente à C est parallèle à Δ.

b. Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ.

Problème 16

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{e^x-x}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

<u>Partie A</u>

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x-x-1$.

1. Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g.

2. Justifier que pour tout x, $e^x-x>0$.

<u>Partie B</u>

1. a. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. a. Calculer $f'(x)$, *f'* désignant la fonction dérivée de *f*.
b. Etudier le sens de variation de *f* puis dresser son tableau de variation.
3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.
b. A l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).
4. Tracer la droite (T), les asymptotes et la courbe (C_f).
On considère la fonction *f* définie sur R par . On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Problème 17

Partie A

Soit g, la fonction définie sur R par : $g(x)=-1+(1-x)e^{x}$

1) Calculer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.Etudier les limites de g sur R
a) Etudier les variations de g sur D_f
b) A l'aide du tableau de variation de g déterminer le signe de g(x)

Partie B

Soit f la fonction de R vers R définie par : $f(x)=-x-1+(-x+2)e^{x}$.Soit (C)dans la courbe de f muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : 2cm)

Pour tout $x\neq 0$, on pose $h(x)=x\left[\left(-1-\dfrac{1}{x}\right)+\left(\dfrac{-x+2}{x}\right)e^{x}\right]$

a- Vérifier que pour tout $x\neq 0$, $h(x)=f(x)$
b- Calculer les limites de f, en $-\infty$ et en $+\infty$
c- Vérifier que pour tout x de R, $f'(x)=g(x)$
d- Dresser le tableau de variation de f
2) Soit(Δ), la droite d'équation $y=-x-1$
a) Montrer que (Δ) est asymptote à (C) en$-\infty$.
b) Etudier la position de (C)par rapport à (Δ) dans tout le plan.
c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_A=0$
d) Construire(Δ) ,(T) et (C)

Partie C

1) Montrer que dans l'intervalle $]1;2[$, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dont on donnera une valeur approchée à 10 près.
2) Soit t, un réel strictement inférieur à α et soit$S(t)$, l'aire de la portion du plan comprise entre (C), (Δ)et les droites d'équations respectives $x=t$ et $x=2$
a) en utilisant la technique d'intégration par parties, calculer$S(t)$ en cm^2
b) Calculer en cm^2, la limite de $S(t)$ lorsque t tend vers$-\infty$

Problème 18

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=(x^2+x+1)e^{-x}-1$
1. a. Déterminer les limites de φ en $-\infty$ et $+\infty$.
b. Etudier le sens de variation de φ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$ qui sera notée α.Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$ et le présenter dans un tableau.

Partie B : Etude de la position relative de deux courbes et calcul d'aire

Sur la feuille jointe sont tracées les courbes représentatives de deux fonctions *f* et *g*. Ces fonctions sont définies par $f(x)=(2x+1)e^{-x}$ et $g(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$. Ces courbes sont notées C_f et C_g.

1. Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées (0 ; 1) et admettent en ce point la même tangente.

2. a. Démontrer que pour tout réel *x*, $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$ où φ est la fonction étudiée dans la partie A.

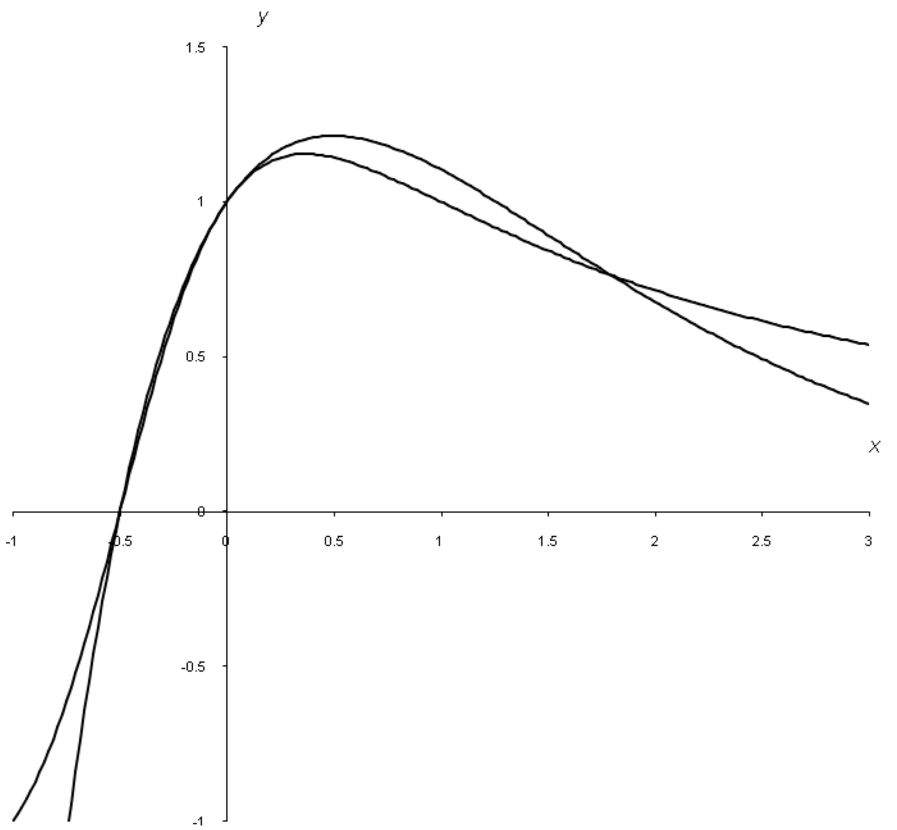
b. A l'aide d'un tableau étudier le signe de *f*(*x*) − *g*(*x*) sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire la position relative des courbes C_f et C_g.

3. a. Montrer que la fonction *h*, définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=(-2x-3)e^{-x}-\ln(x^2+x+1)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f-g$.

b. En déduire l'aire *S*, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par les deux courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x=-\dfrac{1}{2}$ et $x=0$.

Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-4} près de cette aire.



Problème 19

On considère les deux courbes (C_1) et (C_2) d'équations respectives $y = e^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan.

Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente T commune à ces deux courbes.

1. Sur le graphique ci-dessous, tracer approximativement une telle tangente à l'aide d'une règle. Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe (C_1) et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe (C_2).

2. On désigne par *a* et *b* deux réels quelconques, par *A* le point d'abscisse *a* de la courbe (C_1) et par *B* le point d'abscisse *b* de la courbe (C_2).

a. Déterminer une équation de la tangente (T_A) à la courbe (C_1) au point *A*.

b. Déterminer une équation de la tangente (T_B) à la courbe (C_2) au point *B*.

c. En déduire que les droites (T_A) et (T_B) sont confondues si et seulement si les réels *a* et *b* sont solutions du système (S) : $\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases}$.

d. Montrer que le système (S) est équivalent au système (S') : $\begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}$.

3. Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation $(\text{E}) : e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 0$.

Pour cela, on considère la fonction *f* définie sur R par : $f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4$.

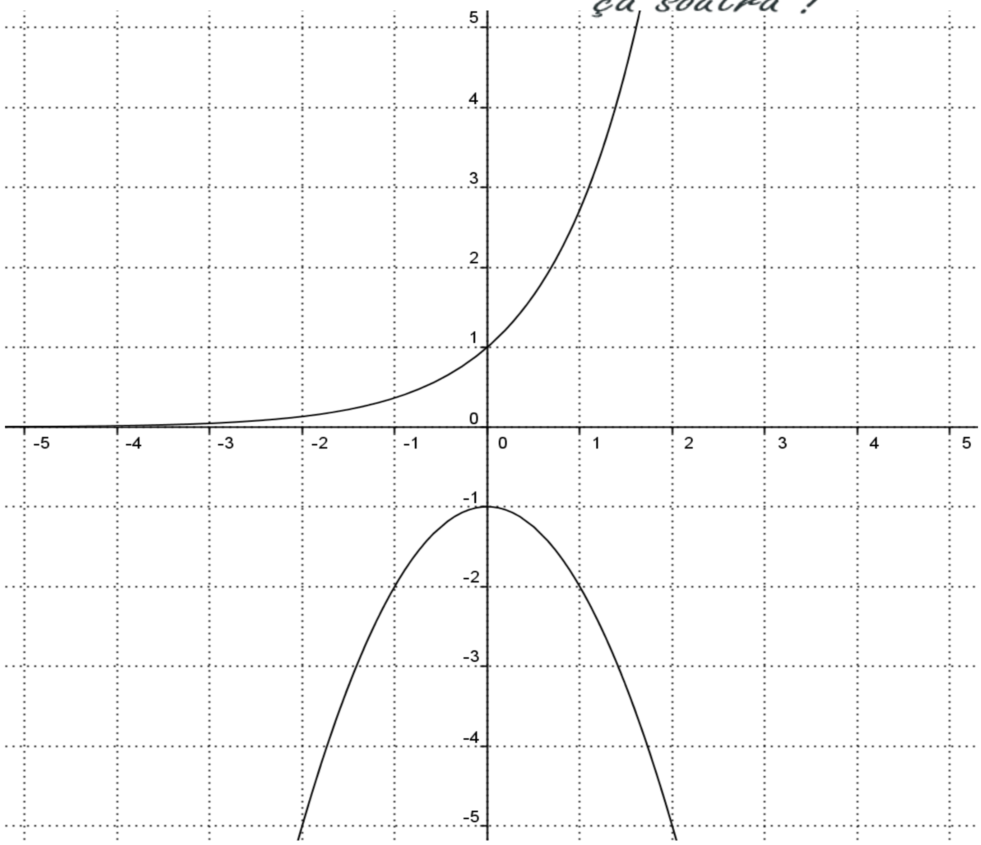
a. Montrer que pour tout *x* appartenant à $]-\infty ; 0[$, $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x-1) < 0$.

b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty ; 0[$.

c. Démontrer que la fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

d. Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$. On note *a* cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a.

4. On prend pour *A* le point d'abscisse *a*. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites (T_A) et (T_A) sont confondues.



Problème 20

<u>Partie A</u>

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\left(x^2-5x+7\right)e^x$.

1. On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

a. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.

b. On rappelle que : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=0$ pour tout *n* entier naturel.

En remarquant que $f(x)=x^2e^x-5xe^x+7e^x$, déterminer la limite de *f* en $-\infty$. En déduire que C admet une asymptote dont on donnera une équation.

2. a. Démontrer que pour tout *x* de $\mathbb{R}$ on a : $f'(x)=\left(x^2-3x+2\right)e^x$.

b. Déterminer le signe de *f* '(*x*) puis les variations de *f*.

Dresser le tableau de variations de *f* (on donnera les valeurs exactes de *f*(1) et de *f*(2)).

3. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

b. Que peut-on dire de la tangente à C au point d'abscisse 1 ? Et au point d'abscisse 2 ?

4. Reproduire puis compléter le tableau suivant :

x	−2	−1	0	1	2	2,5
f(*x*)						

On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près par défaut.

5. Construire la droite T et la courbe C.

<u>Partie B</u>

1. a. Hachurer sur le dessin la partie du plan comprise entre la courbe C, la droite d'équation *x* = 1 et les deux axes du repère. On appelle *A* son aire, en cm².

b. En utilisant la partie A. montrer que pour tout *x* de l'intervalle [0 ; 1] on a : $7\le f(x)\le 3e$.

c. En déduire l'encadrement suivant : $7 \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq 3e$.

d. En utilisant l'encadrement ci-dessus justifier que l'aire *A* est comprise entre 28 et 33 cm^2.

2. a. Soit *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \left(x^2 - 7x + 14\right)e^x$.

Montrer que *g* est une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire la valeur exacte de *A* puis la valeur arrondie à l'unité près.