Problème 21

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

On supposera connus les résultats suivants :
* la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée ;
* $e^0 = 1$;
* pour tout réel *x*, on a $e^x > x$;
* soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A\,;+\infty[$ où *A* est un réel positif. Si, pour tout *x* de $[A\,;+\infty[$, on a $\psi(x) \leq \varphi(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

a. On considère la fonction *g* définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

Montrer que pour tout *x* de $[0\,;+\infty[$, $g(x) \geq 0$.

b. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

2. On appelle *f* la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}}$. On appelle C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. La courbe C est représentée ci-dessous.
a. Montrer que *f* est positive sur $[0\,;+\infty[$.
b. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$. En déduire une conséquence graphique pour C.
c. Etudier les variations de *f* puis dresser son tableau de variations sur $[0\,;+\infty[$.

3. On considère la fonction *F* définie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

a. Montrer que *F* est une fonction croissante sur $[0\,;+\infty[$.

b. Montrer que $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$.

c. Calculer la limite de *F* en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de *F* sur $[0\,;+\infty[$.
d. Justifier l'existence d'un unique réel α tel que $F(\alpha) = 0{,}5$. A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.
4. Soit *n* un entier naturel non nul. On note A_n l'aire en unités d'aire de la partie du plan située entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$. Déterminer le plus petit entier naturel *n* tel que $A_n \geq 0{,}5$.

Problème 22

Le but de l'exercice est démontrer que l'équation (E) : $e^x = \dfrac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

<u>I. Existence et unicité de la solution</u>

On note *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-x}$.
1. Démonter que *x* est solution de l' équation (E) si et seulement si *f* (*x*) = 0.
2. Étude du signe de la fonction *f.*
a. Etudier le sens de variations de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.
b. En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.
c. Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$.
d. Étudier le signe de *f* sur l'intervalle $[0\,;\alpha]$.

<u>II. Deuxième approche</u>

On note *g* la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $g(x) = \dfrac{1+x}{1+e^x}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.
2. En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha)=\alpha$.
3. Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0;\alpha]$.

III. Construction d'une suite de réels ayant pour limite α

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = g(u_n)$.
1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite.
3. Justifier l'égalité : $g(l)=l$. En déduire la valeur de l.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.

Problème 23

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x-1}$ si $x \neq 0$ et $f(0)=1$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
b. Établir que, pour tout nombre réel x non nul, $f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{e^x-1}\right)$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Donner, sans démonstration, la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^x-1}$ et démontrer que f est continue en 0.
3. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a : $e^x \geq x+1$, et que l'égalité n'a lieu que pour x = 0.
b. Calculer la dérivée f' de la fonction f et déterminer la fonction g telle que, pour tout nombre réel x non nul, $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{\left(e^x-1\right)^2}$.
c. Donner le tableau des variations de f.
4. Soient x un nombre réel non nul et les points $M(x ; f(x))$ et $M'\left(-x;f(-x)\right)$ de la courbe C.
a. Établir que $f(-x)=\dfrac{x}{e^x-1}$, puis déterminer le coefficient directeur de la droite (MM').
b. On admet que la fonction f est dérivable en 0. Que suggère alors le résultat précédent ?

Problème 24

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x)=(x-1)\left(2-e^{-x}\right)$.

Sa courbe représentative C est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2 cm).
1. a. Étudier la limite de f en $+\infty$.
b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à $\left(C_f\right)$.
c. Étudier la position relative de $\left(C_f\right)$ et Δ.
2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=xe^{-x}+2(1-e^{-x})$.
b. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) > 0$.
c. Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f.
3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm², du domaine plan limité par la courbe C, la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.
4. a. Déterminer le point A de C où la tangente à C est parallèle à Δ.
b. Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ.

Problème 25

Sur la feuille ci-jointe figurent la courbe représentative (C) dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction *f* définie et dérivable sur R ainsi que son asymptote (D) et sa tangente (T) au point d'abscisse 0.

On sait que le point J (0 ; 1) est le centre de symétrie de la courbe (C), que l'asymptote (D) passe par les points $k(-1;0)$ et J, que la tangente (T) a pour équation $.y = (1-x)e + 1$

Partie A

Expression de *f*

1. Déterminer une équation de (D).

On suppose qu'il existe deux réels *m* et *p* et une fonction ξ définie sur R telle que, pour tout réel *x*, $f(x) = mx + p + \xi(x)$(*x*) avec $\lim\limits_{x \to \infty} \xi(x) = 0$.

a) Déterminer *m* et *p*.

b) Montrer que, pour tout réel *x*, on a : $f(x) + f(-x) = 2$

c) En déduire que la fonction f est impaire puis que la fonction *f ´*, dérivée de *f*, est paire.

3. On suppose maintenant que, pour tout réel *x*, $\xi(x) = (ax+b)e^{-x^2}$ où *a* et *b* sont des réels.

Montrer, en utilisant les données et les résultats précédents, que *a* = - e et *b* = 0.

Partie B

On considère la fonction *f* définie sur R par $f(x) = 1 + x - xe^{-x^2+1}$ et on suppose que la courbe (C) représente la fonction *f* dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. *a*) Montrer que, pour tout réel *x*, la dérivée *f ´* de *f* vérifie : $f'(x) = 1 + (2x^2 \text{-} 1)e^{-x^2+1}$. Calculer $f'(0)$.

b) Vérifier que (T) est bien la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.

Étudier la position relative de la courbe (C_f) et de sa tangente (T).

2. Le graphique suggère l'existence d'un minimum relatif de *f* sur [0; 1].

a) Montrer que $f''(x)$ est du signe de $(6x - 4x^3)$.

b) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α sur [0 ; 1].

c) Montrer que 0,51 < α < 0,52.

d) Exprimer $f(\alpha)$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes en α.

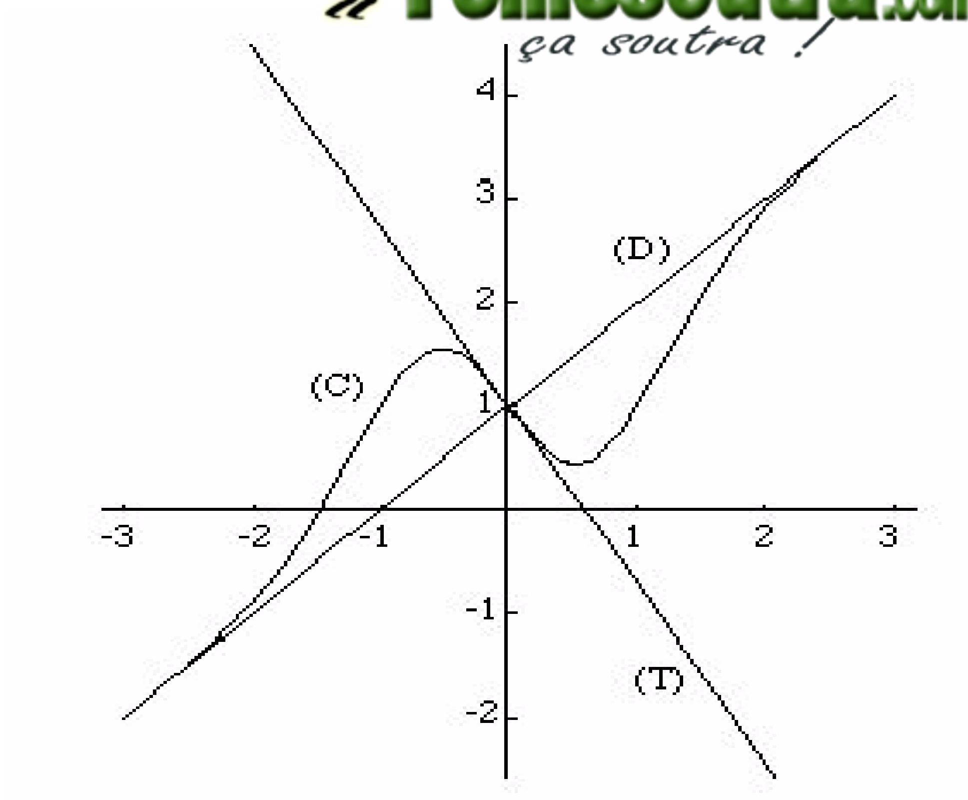
Partie C

Sur le graphique, la courbe (C_f) est très proche de son asymptote pour les points d'abscisse supérieure à 2,4. Cette partie propose de préciser cette situation en calculant, pour tout réel x positif ou nul, l'aire $\mathbb{A}(x)$, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par (C_f), (D) et les droites d'équations $x = 0$ *et* $x = 3$.

1. Exprimer $\mathbb{A}(x)$ en fonction de x.

2. Déterminer la limite A de $\mathbb{A}(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. À partir de quelle valeur de x a-t-on $|\mathbb{A}(x) - \mathrm{A}| \leq 10^{-2}$?



Problème 26

L'objet de ce problème est :

- d'étudier la fonction *f* définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}-x}$;

-de justifier *rigoureusement* le tracé de sa courbe représentative C dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique : 5 cm ;

-de détailler enfin certaines propriétés d'une suite de nombres réels construite à partir de *f* .

Partie I
Questions préliminaires

1. Soit *g* la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=e^{-x}-x+1$.

a) Montrer que, pour tout *x* > 0, on a *g*´(*x*) > 0. En déduire le sens de variation de *g* sur $[0;+\infty[$.

b) Calculez *g*(0). En déduire que, pour tout *x* > 0, on a *g*(*x*) > 0.

2. Soit *h* la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=(2-x)e^{-x}-1$

a) Étudier la fonction *h* et dresser son tableau de variation $[0;+\infty[$

b) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution et une seule α et que l'on a $\alpha>1$.

c) Vérifier la double inégalité. $1{,}84<\alpha<1{,}85$.

d) Préciser, suivant les valeurs du nombre réel $x>0$, le signe de $h(x)$.

Partie II
Etude de la fonction *f* et tracé de la courbe C

1. *a)* Justifier que *f* est définie en tout point de $[0;+\infty[$.

b) Montrer que, pour tout $x>0$, on peut écrire $f(x)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1-x\mathrm{e}^{-x}}$.

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Interpréter géométriquement, relativement à C, le résultat obtenu.

c) Montrer que, pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(\mathrm{e}^x-x)^2}$.

d) Étudier la fonction *f* et dresser son tableau de variation.

2. *a)* Montrer que, pour tout $x>0$, $f(x)-x=\dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x-x}$.

b) En déduire, suivant les valeurs du nombre réel $x>0$, la position de la courbe C par rapport à la droite D d'équation $y = x$.

3. *a)* Préciser la tangente au point de C d'abscisse 0.

b) Tracer C, en faisant figurer sur le dessin la droite D d'équation $y = 1$ et tous les éléments obtenus au cours de l'étude.

Partie III

Etude de la suite $u_n=\int_0^n [f(x)-1]\,\mathrm{d}x$

1. Déterminer une primitive de la fonction *f*. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

2. Interpréter géométriquement le nombre réel □ u_1.

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ (on pourra utiliser l'égalité $n = \ln(\mathrm{e}^n)$).

4. Interpréter géométriquement le nombre réel u_n □ u_1 puis le résultat obtenu dans la question précédente.

Problème 27

On considère la fonction *f* définie sur]0 ; $+\infty$ [par : $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{e^x-1}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Déterminer la limite de *f* quand *x* tend vers 0, *x* réel positif. En déduire que C possède une asymptote dont on précisera l'équation.

2. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$. Montrer que la droite D d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à C. Étudier la position de C par rapport à la droite D.

3. a. Calculer, pour tout *x* réel strictement positif, le nombre dérivé $f'(x)$. Montrer que, pour tout *x* réel strictement positif, $f'(x)=2\dfrac{\left(e^x-\frac{1}{2}\right)\left(e^x-2\right)}{\left(e^x-1\right)^2}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle]0 ; $+\infty$ [.
En déduire le tableau de variations de *f* sur cet intervalle.

4. Tracer la courbe C et ses asymptotes.

5. a. Déterminer les réels *a*, *b* et *c* tels que pour tout $x > 0$, $f(x)=ax+b+\dfrac{ce^x}{e^x-1}$.

b. Hachurer la partie du plan limitée par la courbe C l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$. Déterminer l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.

Problème 28

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On considère la fonction *f* définie sur R par : $f(x)=x^2e^{-x}$. On note f' la fonction dérivée de *f*.

1. a. Déterminer les limites de la fonction *f* en $-+\infty$ et $+\infty$.

b. Calculer $f'(x)$ et déterminer le tableau de variations de *f*.

c. En déduire le signe de *f* sur R.

2. Pour tout nombre réel *a*, on considère l'intégrale : $I(a)=\int_0^a f(x)\,dx$.

a. Donner selon les valeurs de *a* le signe de $I(a)$.

b. À l' aide d'une double intégration par parties montrer que pour tout nombre réel a :
$I(a)=2-2e^{-a}\left(1+a+\frac{1}{2}a^2\right)$.

c. En déduire pour tout nombre réel a : $\frac{1}{2}e^aI(a)=e^a-\left(1+a+\frac{1}{2}a^2\right)$.

3. Soient g et h les fonctions définies sur R par $g(x)=e^x$ et $h(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2$.

On note C la courbe représentative de g et P celle de h.
a. Montrer que les courbes C et P ont la même tangente au point d'abscisse 0.
b. Déduire des questions précédentes la position relative des courbes C et P.

Problème 29

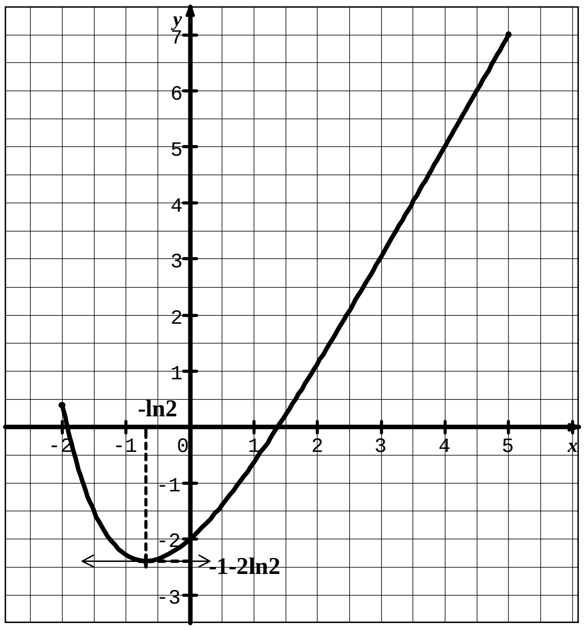
Soit f une fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x)=(1+x)e^{-x}$.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.
1. a. Étudier le signe de $f(x)$ sur R.
b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
c. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur R. Calculer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$.
En déduire les variations de la fonction f sur R.
d. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle [–2 ; 5].

2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $I_n=\int_{-1}^{n} f(x)\,dx$.

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.
a. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $I_n > 0$.
b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
3. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tous réels a et b :
$\int_a^b f(x)\,dx=(-2-b)e^{-b}+(2+a)e^{-a}$.
b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.
c. Déterminer : $\lim_{n\to+\infty} I_n$.
d. Donner une interprétation graphique de cette limite.
4. Déterminer $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que : $\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx=e$. Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?

Problème 30

On donne ci-dessous la courbe représentative (*C*) d'une
fonction *f* définie sur $[-2;5]$.La tangente à (*C*) au point d'abscisse $-\ln 2$ est parallèle à l'axe des abscisses et (*D*)
est la droite d'équation $y = 2x - 3$.



Partie A

1. Par lecture graphique, déterminer $f(0)$, $f'(-\ln 2)$.
2. a. Déterminer graphiquement le nombre de solutions,
   sur l'intervalle $[-2;5]$, de l'équation $f(x) = 0$.
   b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f'(x) < 0$.

Partie B

La fonction de la partie A est définie sur $[-2;5]$
par : $f(x) = 2x - 3 + e^{-x}$.

1. On note *f'* la fonction dérivée de *f* . Montrer que, pour
   tout *x* de $[-2;5]$, $f'(x) = 2 - e^{-x}$.
2. a. Résoudre algébriquement l'équation $f'(x) = 0$.
   b. Donner le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de *x* dans l'intervalle $[-2;5]$.
   c. En déduire le tableau de variations de *f* .
3. On rappelle que (*D*) est la droite d'équation $y = 2x - 3$.
   a. Résoudre l'inéquation $f(x) > 2x - 3$.
   b. Interpréter graphiquement, à l'aide de (*C*) et (*D*), le résultat précédent.