

Problème 31

Partie I

1. a. On lit $f(0) = -2$.

Rappelons que par définition, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a .

Ici, la tangente au point d'abscisse $-\ln 2$ est par hypothèse parallèle à l'axe des abscisses, donc de

coefficient directeur nul : $f'(-\ln 2) = 0$.

b. La courbe intercepte deux fois l'axe des abscisses, l'équation $f(x) = 0$ admet donc deux solutions.

c. Graphiquement, $f'(x) < 0$ quand la courbe est décroissante donc $S =]-2; -\ln 2[$.

Partie II

On admet ici que $f(x) = 2x - 3 + e^{-x}$.

1. Puisque $(e^{-x})' = -e^{-x}$, on a : $2 - e^{-x}$.

2. a. Par conséquent, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 2 = e^{-x} \Leftrightarrow \ln 2 = \ln e^{-x} \Leftrightarrow \ln 2 = -x \Leftrightarrow x = -\ln 2$
ce qui est cohérent avec le graphique puisque c'est seulement au point d'abscisse $-\ln 2$ qu'il y a une tangente horizontale.

b. On a $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2 - e^{-x} < 0 \Leftrightarrow 2 < e^{-x} \Leftrightarrow \ln 2 < \ln e^{-x} \Leftrightarrow \ln 2 < -x \Leftrightarrow x > -\ln 2$ *qui est cohérent avec le lc.*
 De même, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow 2 > e^{-x} \Leftrightarrow \ln 2 > \ln e^{-x} \Leftrightarrow \ln 2 > -x \Leftrightarrow x < -\ln 2$.

c. On en déduit le signe de la dérivée donc les variations de la fonction :

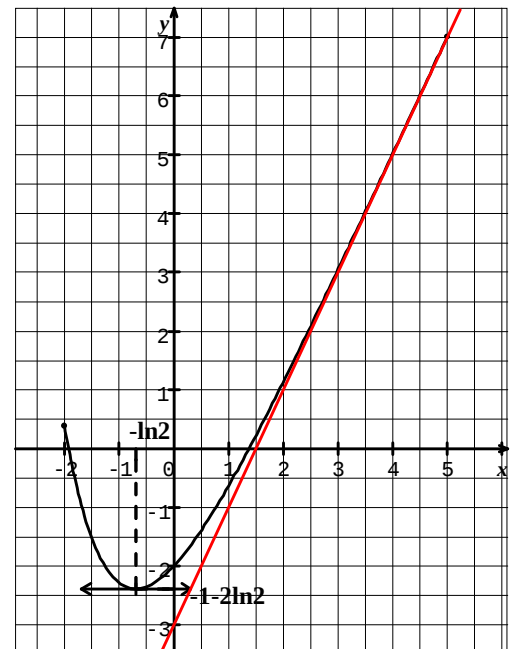
x	-2		$-\ln 2$		5
$f'(x)$		-		+	
$f(x)$	$e^2 - 7$	↘		↗	
			$-1 - 2\ln 2$		$7 + e^{-5}$

3. a. On a $f(x) > 2x - 3 \Leftrightarrow 2x - 3 + e^{-x} > 2x - 3 \Leftrightarrow e^{-x} > 0$:

or une exponentielle est toujours positive donc cette inéquation est toujours vraie.

Ainsi, $f(x) > 2x - 3$ pour tout x de $[-2; 5]$.

b. Résoudre l'inéquation $f(x) > 2x - 3$ revient à étudier les positions des courbes C et D, par conséquent, la courbe C est toujours strictement au dessus de la droite D.



Problème 32

1. a. On lit $f(0) = -1$.

b. La courbe intercepte deux fois l'axe des abscisses, l'équation $f(x) = 0$ admet donc deux solutions.

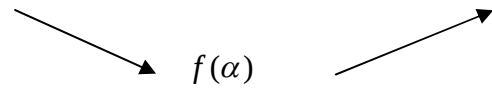
c. On constate que la courbe admet une seule tangente horizontale (en son sommet), l'équation $f'(x)$ admet donc une seule solution.

2. $f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 : cette tangente est D. Cette droite passe par les points $A(-1; 0)$, $B(0; -1)$. Son coefficient directeur

est donc $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -1$.

3. Le tableau de variations de la fonction et le tableau de signe de la dérivée f' sont :

x	-2	α	2
-----	----	----------	---

$f'(x)$	-	+
$f(x)$		

- C_3 ne convient donc pas, le signe de la fonction qu'elle représente n'est pas celui de f' .

- C_1 ne convient pas non plus puisque $f'(0) = -1$. Ainsi, la fonction f' est représentée par C_2 .

Partie B

On admet que $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2x - 1,5$.

$$1. f(0) = \frac{1}{2}e^0 - 2 \times 0 - 1,5 = \frac{1}{2} - 1,5 = -1$$

2. a. nous savons que $(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$ donc $f'(x) = e^{2x} - 2$ (on retrouve bien $f'(0) = -1$).

$$b. \text{ nous avons : } e^{2x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \geq 2 \Leftrightarrow \ln(e^{2x}) \geq \ln 2 \Leftrightarrow 2x \ln e \geq \ln 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{\ln 2}{2}$$

puisque la fonction $\ln$ est croissante. Donc $S = \left[\frac{\ln 2}{2}; 2 \right]$.

c. Sur l'intervalle $\left[\frac{\ln 2}{2}; 2 \right]$, la fonction f est croissante et le sommet a pour abscisse $\frac{\ln 2}{2}$.

$$f\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{\ln 2} - \ln 2 - 1,5 = \frac{1}{2} \times 2 - \ln 2 - 1,5 = 1 - \ln 2 - 1,5 = -0,5 - 2 \ln 2$$

x	-2	$\frac{\ln 2}{2}$	2
$f'(x)$	-	-	+
$f(x)$	$0,5 \times e^{-4} + 2,5$	$-0,5 - \ln 2$	$-5,5 + \frac{e^4}{2}$

Problème 33

Partie 1. Lecture graphique

1. La fonction R est une fonction linéaire, donc elle est représentée par la droite passant par l'origine O .

2. à l'aide du graphique :

L'entreprise doit fabriquer de 1 à 8 centaines

de sacs pour être certain d'être bénéficiaire.

(il faut que la droite soit au dessus de la courbe).

x	2,9	4	8
$C(x)$	10	15,5	71
$R(x)$	29	40	80

Partie 2 :

$$1. B(x) = R(x) - C(x) ; B(x) = 10x - (2x + e^{0,5x}) = 10x - 2x - e^{0,5x} . B(x) = 10x - 2x - e^{0,5x} = 8x - e^{0,5x} .$$

$$2. \text{ Soit } B' \text{ la fonction dérivée de la fonction } B . B'(x) = 8 - 0,5 \times e^{0,5x} .$$

$$b. \text{ Dans l'intervalle } [0; 15] : B'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 8 - 0,5 \times e^{0,5x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{8}{0,5} \leq e^{0,5x} \Leftrightarrow 16 \leq e^{0,5x}$$

$$c. \text{ On a : } B'(x) = 0 \Leftrightarrow 8 - 0,5 \times e^{0,5x} = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{0,5} = e^{0,5x} \Leftrightarrow 16 = e^{0,5x} \Leftrightarrow \ln 16 = \ln e^{0,5x} \Leftrightarrow \ln 2^4 = 0,5x \ln e$$

$$\text{c'est-à-dire } 0,5x = 4 \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{4 \ln 2}{0,5} = 8 \ln 2 \text{ puisque } \ln e = 1. \text{ Donc}$$

$$B'(x) \leq 0 \Leftrightarrow e^{0,5x} \geq 16 \Leftrightarrow x \geq 8 \ln 2$$

$$\text{de plus } B(0) = 8 \times 0 - e^0 = -1 ; B(15) = 8 \times 15 - e^{0,5 \times 15} = 120 - e^{7,5} \approx -1688$$

$$B(8\ln 2) = 8 \times 8\ln 2 - e^{0,5 \times 8\ln 2} = 64\ln 2 - e^{4\ln 2} = 64\ln 2 - e^{\ln 2^4} = 64\ln 2 - e^{\ln 16} = 64\ln 2 - 16.$$

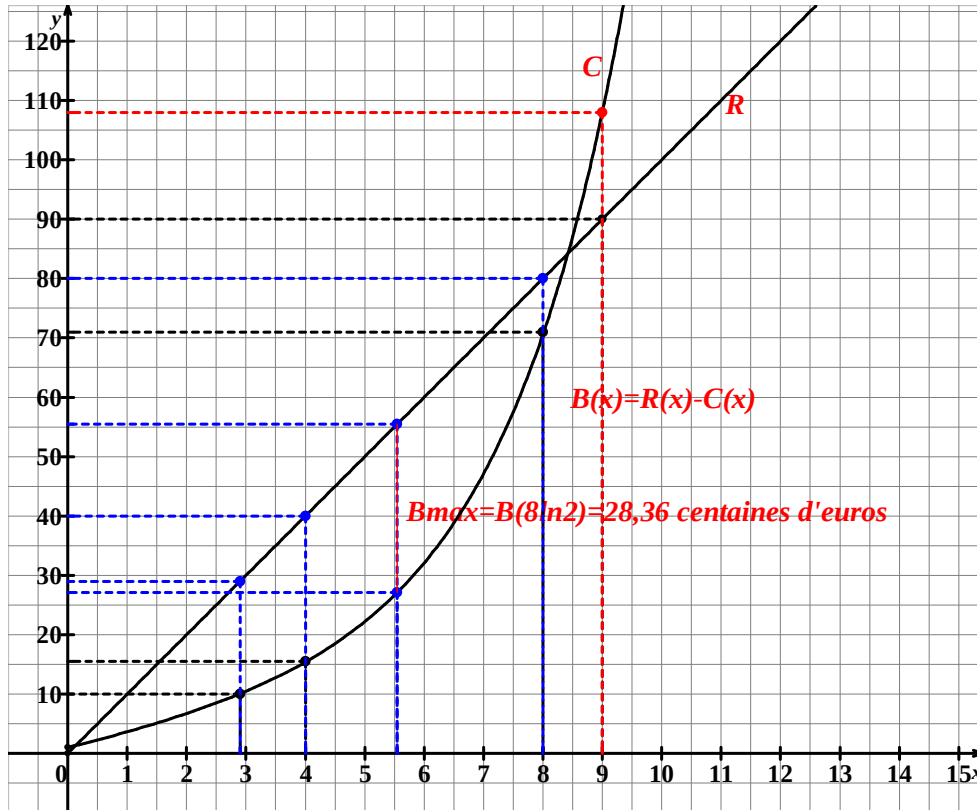
D'où le tableau de variation :

x	0		$8\ln 2$		15
$B'(x)$		+	0	-	
$B(x)$	-1	↗ $64\ln 2 - 16$ ↘		↘ $120 - e^{7,5}$ ↗	

d. B admet un maximum pour $x = 8\ln 2$. C'est-à-dire pour $x \approx 5,5$ à 10^{-2} près.

3. $B(8\ln 2) = 64\ln 2 - 16 \approx 28,36$ centaines d'euros arrondi à l'euro.

La valeur maximale du bénéfice est alors de 2836 euros.



Problème 34

Partie A

1. Limite en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2.a Limite en 0 : En développant, on vérifie bien que : $\frac{e^x}{x}(x \ln x + 1) = e^x \ln x + \frac{e^x}{x} = f(x)$

2.b $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = e^0 \times (+\infty) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

On en déduit que la courbe C admet l'axe des ordonnées, d'équation $x = 0$, pour asymptote verticale au voisinage de 0.

Partie B - Etude d'une fonction intermédiaire.

1.a. $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$

1.b Etude du signe de $x^2 - 2x + 2$: $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$. Donc le numérateur de g' est strictement

Positif pour tout x strictement positif.

x	0	$+\infty$
$x^2 - 2x + 2$		+
x^3		+
$g'(x)$		+
$g(x)$		

2.a Existence et unicité de la solution de l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $[1/2; 1]$:

La fonction g est dérivable sur $[1/2; 1]$;

La fonction g est strictement croissante sur $[1/2; 1]$;

$$g(1/2) = \ln(1/2) + \frac{2}{1/2} - \frac{1}{(1/2)^2} = -\ln 2 + 4 - 4 = -\ln 2 < 0 ; \text{ et } g(1) = \ln 1 + \frac{2}{1} - \frac{1}{1^2} = 0 + 2 - 1 = 1 > 0$$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[1/2; 1]$.

2.b En utilisant la table de la calculatrice, on obtient les encadrements suivants :

$$g(0,5) \approx -0,69 < 0 ; \quad g(0,6) \approx 0,04 > 0 \quad \text{donc } 0,5 < \alpha < 0,6$$

$$g(0,59) \approx -0,01 < 0 \text{ et } g(0,6) \approx 0,04 > 0 \quad \text{donc } 0,59 < \alpha < 0,60 ,$$

3. On déduit des questions précédentes le tableau de signes suivant pour la fonction g :

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		-	0 +

Partie C - Etude des variations de la fonction f et construction de la courbe associée.

1.a Calcul de la dérivée de la fonction f :

Dérivée du produit $e^x \ln x$: $(e^x \ln x)' = e^x \ln x + \frac{e^x}{x}$

Dérivée du quotient $\frac{e^x}{x}$: $\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$:

Donc : $f'(x) = e^x \ln x + \frac{e^x}{x} + \frac{xe^x - e^x}{x^2} = e^x \left(\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = e^x g(x)$

1.b Signe de f' et Variations de f

x	0	α	$+\infty$
e^x		+	+

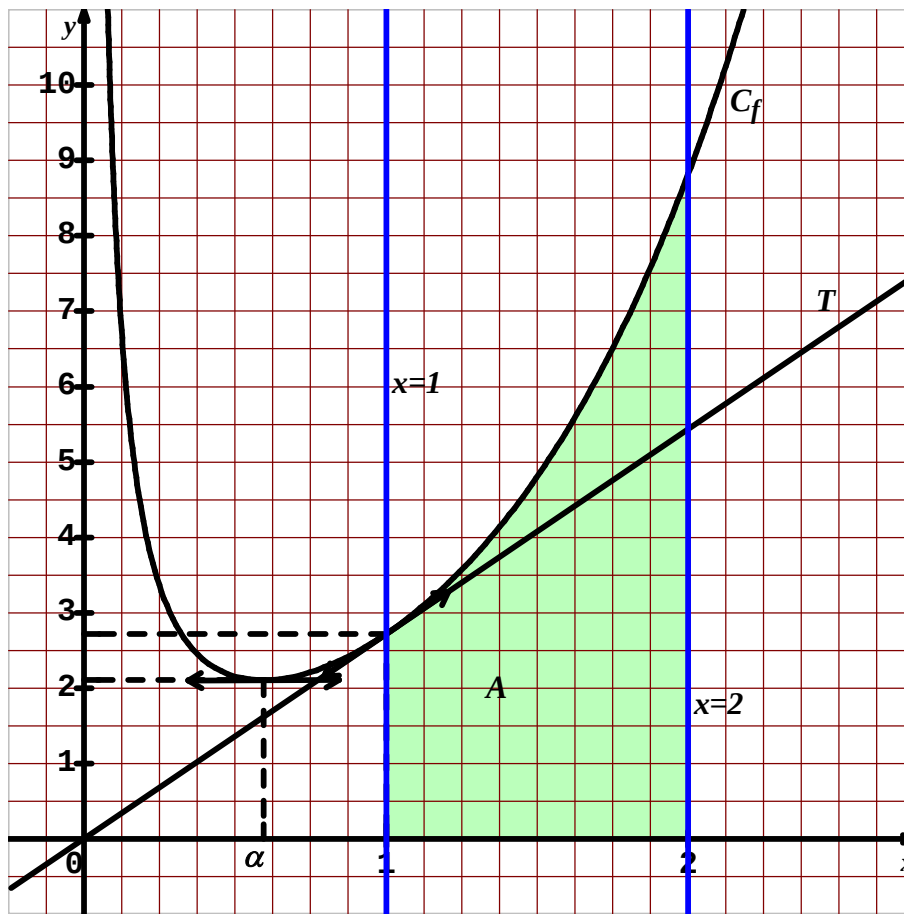
$g(x)$	–	0	+
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$			

2.b $f(\alpha) = f(0,6) \approx 2,1$

3.a

x	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5
$f(x) \text{ à } 10^{-1} \text{ près}$	3,4	2,2	2,2	2,7	3,6	4,8	6,5	8,8	11,9	16,0

3.b



Partie D - Calcul d'aire

1. D'après la question 1.a) de la partie C, on a : $F'(x) = (e^x \ln x)' = e^x \ln x + \frac{e^x}{x} = f(x)$.

Donc F est une primitive de f .

2. a Voir figure.

2. b Calcul de l'aire : $I = \int_1^2 f(x) dx = [F(x)]_1^2 = F(2) - F(1) = e^2 \ln 2 - e^1 \ln 1 = e^2 \ln 2$

La fonction f étant positive sur $[1 ; 2]$, alors l'intégrale I représente l'aire de E en unités d'aires : $\text{aire}(E) = (e^2 \ln 2) u.a = 4e^2 \ln 2 \approx 20,5 \text{ cm}^2$

Problème 33

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

1. L'équation $y' + y = 0$ est de la forme $y' = ay$ avec $a = -1$, or on sait que les solutions de

cette équation sont des fonctions y définies par $y = k e^{ax} = k e^{-x}$ où k est une constante réelle quelconque.

b) h est une solution de l'équation $y' + y = 0$ donc h est de la forme : $h(x) = k e^{-x}$

$h(1) = 1/e$ d'où $k e^{-1} = \frac{k}{e} = \frac{1}{e}$ par conséquent $k = 1$. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = e^{-x}.$$

2. $u(x) = e^{-x} + ax$ donc pour tout réel x on a : $u'(x) = -e^{-x} + a$. de $u' + u = -x - 1$ on en déduit que pour tout réel x

on a : $-e^{-x} + a + e^{-x} + ax = ax + a = -x - 1$ soit encore : $ax + a = -x - 1$ par identification : $a = -1$.

La fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = e^{-x} - x$ est solution de l'équation différentielle (E).

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire f

1. $f(x) = e^{-x} - x$

1. a.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \end{array} \right\} \text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

1. b.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \end{array} \right\} \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

2. Pour tout réel x on a : $f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ comme somme de deux nombres strictement négatif sur $\mathbb{R}$

f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$:

3. a) $f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$ et $f(1) = e^{-1} - 1 = -1 + 1/e < 0$

donc on a $f(0) > 0 > f(1)$ de plus la fonction est dérivable

et strictement décroissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par conséquent :

l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[0 ; 1]$

b) $f(0,56) > 0 > f(0,57)$ donc $0,56 < \alpha < 0,57$ est un encadrement de α d'amplitude 0,01.

4. f est strictement décroissante sur $[0 ; 1]$ et $f(\alpha) = 0$ par conséquent on en déduit le signe de $f(x)$ sur

l'intervalle $[0 ; 1]$: Si x appartient à $[0 ; \alpha[$ alors $f(x) > 0$. Si x appartient à $] \alpha ; 1]$ alors $f(x) < 0$

Partie C : Calcul de l'aire d'une partie du plan

1. Voir figure :

2. L'aire D est délimitée par les droites d'équation $x = 0$; $x = \alpha$, la courbe C_f et l'axe des abscisses.

Sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$; $f(x) \geq 0$ donc l'aire de la partie D en unités d'aire est donnée par :

$$\int_0^\alpha f(x) dx = \left[-e^{-x} - \frac{x^2}{2} \right]_0^\alpha \times u.a = \left(-e^{-\alpha} - \frac{\alpha^2}{2} + e^0 \right) u.a = \left(1 - e^{-\alpha} - \frac{\alpha^2}{2} \right) \times u.a$$

On peut aller plus loin sachant que $f(\alpha) = 0$ c'est-à-dire $e^{-\alpha} - \alpha = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha} = \alpha$;

$$\int_0^\alpha f(x) dx = \left(1 - \alpha - \frac{\alpha^2}{2} \right) \times u.a$$

partie D : Étude d'une fonction g et représentation graphique

1. a) Pour tout $x \in]-\infty ; \alpha[$:

$$g(x) = \frac{x}{e^{-x} - x} = \frac{x e^x}{(e^{-x} - x) e^x} = \frac{x e^x}{1 - x e^x}$$

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	$+\infty$ $-\infty$ 

x	$-\infty$ $+\infty$	-1
$f'(x)$	$-$	0 $+$
$f(x)$	0 $+\infty$	$\frac{-1}{e+1}$

$$b) \quad g(x) = \frac{x}{e^{-x} - x} = \frac{xe^x}{1 - xe^x} \quad ; \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - xe^x) = 1 \end{array} \right\} \text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe C_g en $-\infty$.

$$2. \quad g(x) = \frac{x}{e^{-x} - x} = \frac{x}{f(x)} \quad ; \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \alpha} x = \alpha > 0 \\ \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = 0 \end{array} \right\} \text{donc } \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty$$

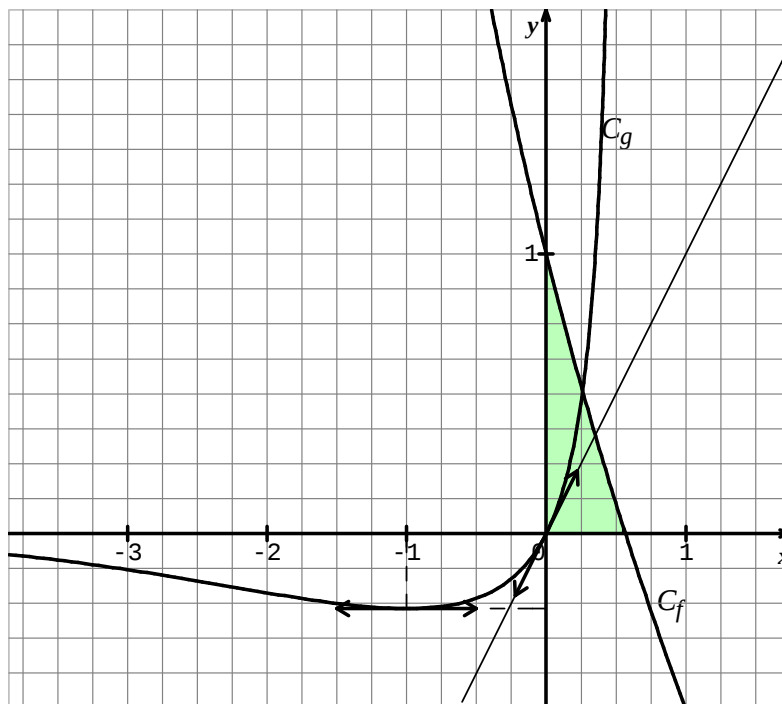
Interprétation graphique : la droite d'équation $x = \alpha$ est asymptote à la courbe C_g

$$3. a) \text{ Pour tout } x \in]-\infty; \alpha[: g(x) = \frac{x}{e^{-x} - x} = \frac{x}{f(x)} \quad g'(x) = \frac{f(x) - xf'(x)}{f(x)^2} = \frac{e^{-x} - x - x(-e^{-x} - 1)}{(e^{-x} - x)^2} = \frac{(1+x)e^{-x}}{(e^{-x} - x)^2}$$

b) $g'(x)$ est du signe de $1+x$ sur $]-\infty; \alpha[$ car $(e^{-x} - x)^2 > 0$ et $e^{-x} > 0$ sur $]-\infty; \alpha[$:
 $1+x > 0$ si $x > -1$. On en déduit que sur $]-\infty; -1]$, $f'(x) \leq 0$ donc f décroissante et sur $]-1; \alpha[$, $f'(x) \geq 0$ donc f croissante.

$$g(-1) = \frac{-1}{e+1}$$

4.



Problème 34

Partie A

1. équation différentielle (E_0) est une équation différentielle de premier ordre, linéaire, de la forme $y' = ay$, la solution générale de cette équation est de la forme $y = Ce^{ax}$, avec C réel

On a : $y' = -5y$, la solution générale est $y = Ce^{-5x}$ avec C réel.

2. soit $u(x) = ax^3 + b$, alors $u'(x) = 3ax^2$. Si u est solution de l'équation différentielle (E) , alors u vérifie

$$\text{l'équation } (E). \text{ Donc } u'(x) + 5u(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5, \quad 3ax^2 + 5(ax^3 + b) = 5x^3 + 3x^2 + 5$$

$$5(a-1)x^3 + 3(a-1)x^2 + 5(b-1) = 0 \Leftrightarrow a-1=0 \text{ et } b-1=0, \text{ donc } a=1 \text{ et } b=1.$$

Par conséquent la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3 + 1$.

$$3.a. \quad h(x) = Ce^{-5x} + x^3 + 1, \text{ donc } h'(x) = -5Ce^{-5x} + 3x^2 \text{ et}$$

$$h'(x) + 5h(x) = -5Ce^{-5x} + 3x^2 + 5Ce^{-5x} + 5x^3 + 5 = 5x^3 + 3x^2 + 5$$

Donc la fonction h est bien une solution de l'équation différentielle (E) .

$$b. \quad h(0) = Ce^0 + 0 + 1 = -2 \Leftrightarrow C + 1 = -2 \Leftrightarrow C = -3 \text{ et on a : } h(x) = -3e^{-5x} + x^3 + 1.$$

Partie B

1.a. limite en $+\infty$. $f(x) = -3e^{-5x} + x^3 + 1$

On pose $u(x) = -5x$. On sait que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} u = \lim_{x \rightarrow -\infty} -5x = +\infty$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3e^{-5x} = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$. on déduit par composition et somme de limites que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty .$$

2. limite en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x = -\infty$ et $\lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3e^{-5x} = 0$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$

on déduit par somme de limites que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2.a . La fonction f est dérivable comme somme des fonction dérivables donc on a :

$$f'(x) = 15e^{-5x} + 3x^2$$

b. On sait que $x^2 > 0$, donc $3x^2 > 0$, de plus $15e^{-5x} > 0$, puisque $e^{-5x} > 0$ pour tout réel x . On déduit que $f'(x) > 0$, pour tout réel x et par conséquent la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3.a $f(0) = -3e^0 + 0 + 1 = -3 + 1 = -2$ et $f(1) = -3e^{-5} + 1 + 1 = -3e^{-5} + 2$.

b. On sait que la fonction f est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est aussi strictement croissante sur $[0;1] \subset \mathbb{R}$, de plus $f(0) = -2 < 0$ et $f(1) = -3e^{-5} + 2 \approx 1,98 > 0$, donc $0 \in [f(0); f(1)]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires : l'équation $f(x)$ admet une solution unique α telle que $f(\alpha) = 0$ et $\alpha \in [0;1]$.

c. à l'aide de la calculatrice on a à 10^{-2} près $f(0,21) \approx -0,04 < 0$ et $f(0,22) \approx 0,01 > 0$, donc $0,21 \leq \alpha \leq 0,22$, puisque f est strictement croissante sur $[0;1] \subset \mathbb{R}$.

d. signe de $f(x)$. comme f est strictement croissante sur $[0;1] \subset \mathbb{R}$, donc $f(x) < 0$ sur $]-\infty; \alpha[$

et $f(x) > 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.

Partie C

1. a . Pour tout réel x , on pose $d(x) = f(x) - u(x) = -3e^{-5x}$. La fonction exponentielle est strictement

positive sur $\mathbb{R}$, et par conséquent $-3e^{-5x} < 0$. On déduit que $d(x) < 0$ pour tout réel x

1.b. puisque $d(x) < 0$, on conclut que la courbe C est en dessous de la courbe Γ .

2. tableau de valeurs

x	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
$f(x)$	-7,16	-2	-0,1	0,66	1,07	1,46	1,98	2,72

3. voir graphique

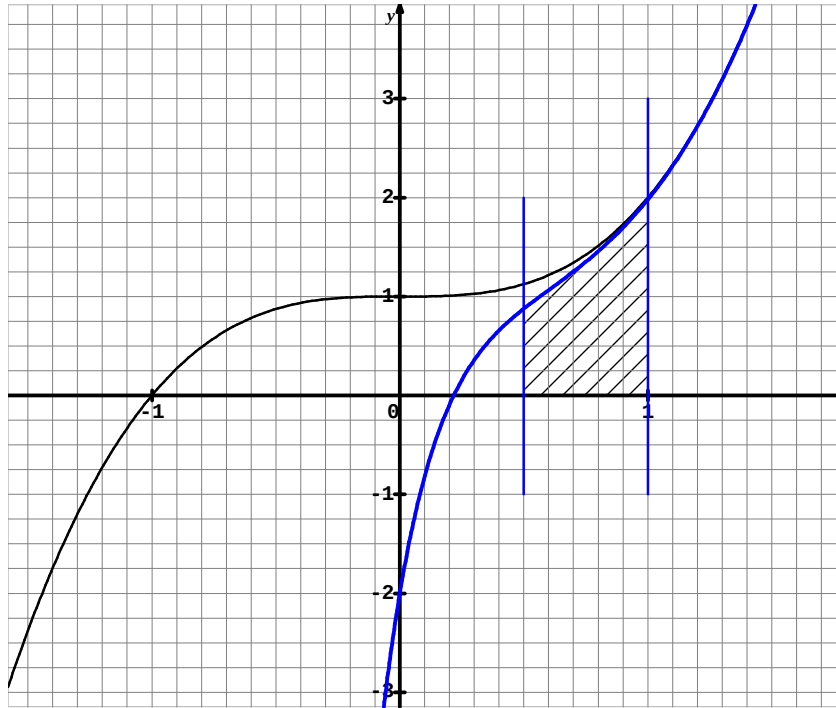
Partie D

2. Sur $[1/2;1]$, $f(x) > 0$, donc l'aire de la partie hachurée , en unité d'aire est égale à

$$A = \left(\int_{1/2}^1 f(x) dx \right) u.a = \left([F(x)]_{1/2}^1 \right) u.a \quad . \quad A = [F(1) - F(1/2)] u.a$$

$$f(x) = -3e^{-5x} + x^3 + 1 \text{ , alors } F(x) = \frac{3}{5}e^{-5x} + \frac{1}{4}x^4 + x \text{ et } F(1) = \frac{3}{5}e^{-5} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{5}e^{-5} + \frac{5}{4} \text{ ,}$$

$$F(1/2) = \frac{3}{5}e^{-5/2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}e^{-5/2} + \frac{33}{64} \text{ . Donc } A = \left(\frac{3}{5}e^{-5} + \frac{5}{4} - \frac{3}{5}e^{-5/2} - \frac{33}{64} \right) u.a = \left(\frac{3}{5}e^{-5} - \frac{3}{5}e^{-5/2} + \frac{47}{64} \right) u.a$$



Problème 35

1. $2y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{2}y$. On sait que les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $y = ke^{-x/2}$

2. La solution vérifiant $f(2) = e$, donc $f(2) = ke^{-(1/2) \times 2} = ke^{-1} = e \Leftrightarrow k = e^2$.

La fonction s'écrit donc $f(x) = e^2 e^{-x/2} = e^{2-x/2}$. $f(x) = e^{2-x/2}$

3. $g(x) = (2x+1)[e^{2-x/2}]^2 - 9 = (2x+1)e^{4-x} - 9$. Donc $g(x) = (2x+1)e^{4-x} - 9$

Partie B : Étude de la fonction g $g(x) = (2x+1)e^{4-x} - 9 = e^4 \times (2x+1)e^{-x}$

1. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+1) = -\infty$ donc par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

2. a. On a $g(x) = (2x+1)e^{4-x} - 9 = e^4 \times (2x+1)e^{-x} = 2e^4 x e^{-x} + e^4 e^{-x} - 9$.

b. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -9$

c. La question précédente montre que la droite Δ d'équation $y = -9$ est asymptote de la courbe C au voisinage de plus l'infini.

3. a. g est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(x) = 2e^{4-x} - (2x+1)e^{4-x} = e^{4-x}(1-2x)$$

b. Comme $e^{4-x} > 0$ quel que soit le réel x , le signe de $g'(x)$ est celui de $1-2x$ qui s'annule pour

$$x = 1/2. \text{ Donc } g'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1/2, \text{ donc } g \text{ est croissante sur }]-\infty; 1/2[; g'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1/2$$

$$\text{donc } g \text{ est décroissante sur }]1/2; +\infty[. \text{ On calcule } g(1/2) = (1+1)e^{4-1/2} - 9 = 2e^{7/2} - 9$$

4. a. $g(-1) = (-2+1)e^{4+1} - 9 = -e^5 - 9 < 0$ et $g(0) = e^4 - 9 > 0$.

b. La fonction g est dérivable et croissante sur l'intervalle $[-1; 0]$; de plus $g(-1) \approx -157 < 0$ et

$g(0) = e^4 - 9 > 0$. L'équation $g(x) = 0$ admet donc une solution unique α dans l'intervalle $[-1; 0]$

c. La calculatrice donne $g(-0,45) \approx -0,437 < 0$ et $g(-0,44) \approx 1,173 > 0$, donc $\alpha \approx -0,45$ au centième près.

5. On a $g(4) = (8+1)e^{4-4} - 9 = 9e^0 - 9 = 0$ et $g'(4) = e^{4-4}(1-8) = -7e^0 = -7$.

Une équation de la droite D tangente à la courbe C au point d'abscisse 4 est donc :
 $y = f'(4)(x-4) + f(4) = -7(x-4) + 0 = -7x + 28$. (T) : $y = -7x + 28$

6. a. Voir plus bas

b. Voir plus bas

Partie C : Calcul d'aire

1. La fonction G est une somme de fonctions dérivables sur R; elle est dérivable et

$G'(x) = -2e^{4-x} - (-2x-3)e^{4-x} - 9 = (2x+1)e^{4-x} - 9 = g(x)$. Donc G est une primitive de g.

2. a. Voir figure

b. Sur l'intervalle $[0 ; 4]$ la fonction g est positive ; l'aire (en unités d'aire de la surface

H est donc égale à l'intégrale $A = \left(\int_0^4 g(x) dx \right) \times u.a = \left([G(x)]_0^4 \right) u.a = [G(4) - G(0)] u.a$

Or $G(4) = (-8-3)e^{4-4} - 36 = -11e^0 - 36 = -47$ et $G(0) = (-3)e^4$, donc

$$\left(\int_0^4 g(x) dx \right) \times u.a = (-47 - (-3e^4)) u.a = (3e^4 - 47) u.a$$

c. L'unité d'aire est égale à $2 \times 0,1 = 0,2 \text{ cm}^2$. L'aire est donc égale

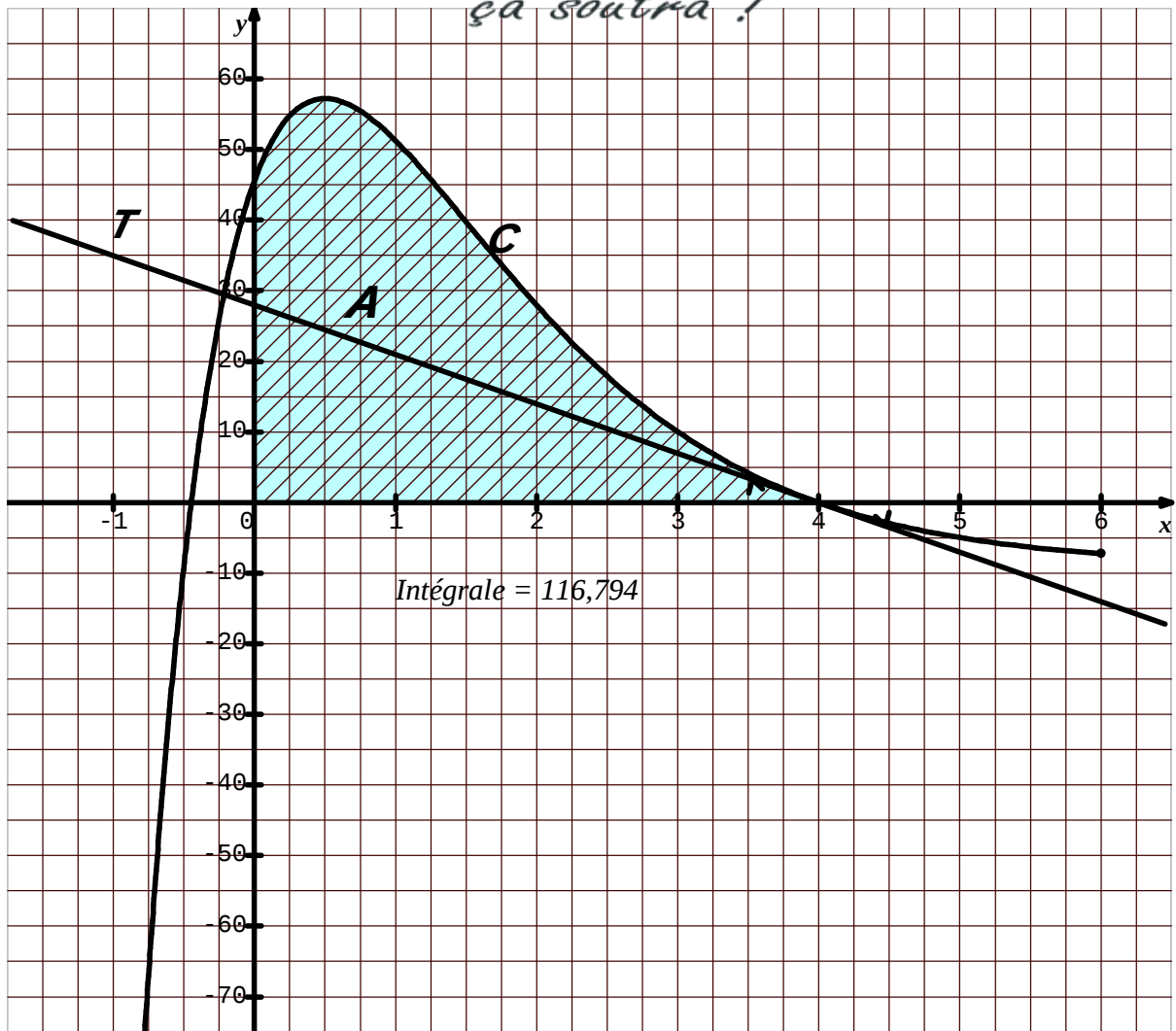
$A = (3e^4 - 47) u.a = (3e^4 - 47) \times 0,2 \approx 25,36 \text{ cm}^2$ (au centième près).

Annexe du problème à rendre avec la copie

Tableau des valeurs de la fonction g (valeurs arrondies à l'unité)

x	-0,75	-0,5	-0,25	0	0,5	1	2	3	4	5	6
f(x)	-67	-9	26	46	51	28	10	8	0	-5	-7

Repère orthogonal d'unités graphiques : 2 cm pour 1 unité en abscisse et 1 cm pour 10 unités en ordonnée



Problème 35

a. La fonction f est une solution de l'équation différentielle (E) :

Réponse a. : (E) : $2y' + y = 0$; **Réponse b.** : (E) : $2y' - y = 0$; **Réponse c.** : (E) : $y' - y = 0$.

(y désigne une fonction inconnue définie sur l'ensemble des nombres réels de variable x ; y' désigne la fonction dérivée de la fonction y .)

b. La courbe C a pour asymptote la droite d'équation :

Réponse a. : $y = -2x$; **Réponse b.** : $x = 0$; **Réponse c.** : $y = 0$.

2. On note S le solide de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe des abscisses.

La valeur V du volume du solide S est donnée par : $V = \pi \int_0^2 [f(x)]^2 dx$ (en unités de volume).

La valeur V du volume du solide S, en cm^3 est égale à :

Réponse a. : $4\pi(1 - e^{-2})$; **Réponse b.** : $16\pi(1 - e^{-2})$; **Réponse c.** : $32\pi(1 - e^{-2})$

Problème 36

1. Posons $u = 2x + 3$; $u' = 2$ et $v = e^{-x}$; $v' = -e^{-x}$ et on obtient

$$f'(x) = u'v + v'u = 2e^{-x} - e^{-x}(2x + 3) = e^{-x}(-2x - 1) \quad : \text{réponse c.}$$

2.

a. $f(0)$ est l'image de 0 par f , $f(0) = \frac{8(0+1)}{e^0} = \frac{8}{1} = 8$ elle est égale à 8 : **Réponse d.**

b. $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0, il est égal à 0 :

Réponse b.

$$f'(x) = \frac{8(x+1)}{e^x} = \frac{8e^x - 8(x+1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{8e^x - 8xe^x - 8e^x}{e^{2x}} = \frac{-8xe^x}{e^{2x}} = -8xe^x \times e^{-2x} = -8xe^{x-2x} = -8xe^{-x},$$

$$\text{donc } f'(0) = -8xe^{-x} = -8 \times 0 \times e^{-0} = 0$$

c. Sur l'intervalle $[-1; 4]$ les deux courbes se coupent deux fois : **Réponse b.**

d. Pour calculer la dérivée de g on utilise la formule $(uv)' = u'v + v'u$ avec

$$\begin{cases} u = 0,5(x+1) = 0,5 + 0,5x \\ u' = 0,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = e^x \\ v' = e^x \end{cases}, \text{ on obtient donc } g'(x) = 0,5e^x + (0,5x + 0,5)e^x = (0,5x + 1)e^x \quad : \text{Réponse a.}$$

Problème 37

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x(x+3) - 1$

1) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+3) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

$$g(x) = x e^x + 3e^x - 1. \text{ Comme } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (3e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^x - 1 = 0 - 1 = -1$$

alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$. On déduit que la droite d'équation : $y = -1$ est une asymptote

horizontale à la courbe

C au voisinage de $-\infty$.

2) $g'(x) = e^x(x+3) + e^x$; $g'(x) = e^x(x+3+1)$; $g'(x) = e^x(x+4)$. $g'(x)$ est du signe de $x+4$ car $e^x > 0$,

on en déduit que : g est strictement décroissante sur $]-\infty; -4]$ et g est strictement croissante sur $[-4; +\infty[$.

Il en résulte le tableau de variation suivant :

3) Comme la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]-4; 0[$ et que $g(-4)$ et $g(0)$ sont de

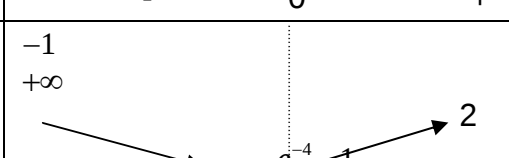
signes contraires alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $]-4; 0[$ ($g(-4) = -e^{-4} - 1 < 0$ et $g(0) = e^0(0+3) - 1 = 3 - 1 = 2 > 0$)

4) On en déduit des questions précédentes que : $g(x) \leq 0$ si et seulement si $x \leq \alpha$ et $g(x) \geq 0$ ssi $x \geq \alpha$

Partie B : Etude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative.

Soit f la fonction définie par $f(x) = -x + (x+2)e^x$

x	$-\infty$	-4	0
	$+\infty$		
$g'(x)$		$-$	0 $+$
$g(x)$	-1 $+\infty$		2



1) a) $f(x) = -x + xe^x + 2e^x$. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 2e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = +\infty + 0 = +\infty \text{ alors } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

b) $f(x) - (-x) = (x+2)e^x = xe^x + 2e^x$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x)) = 0$.

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x)) = 0$ alors la droite (D) d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à la courbe (C_f) en $-\infty$

c) Les positions relatives de (D) et (C_f) sont données par le signe de $(x+2)$ car $e^x > 0$. On en déduit que :

(C_f) est au-dessous de (D) sur l'intervalle $]-\infty; -2]$ et (C_f) est au-dessus de (D) sur l'intervalle $[-2; +\infty[$.

2) $f(x) = e^x \left(-\frac{x}{e^x} + (x+2) \right)$ Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{e^x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) = +\infty$

alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{e^x} + (x+2) \right) = +\infty$. On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

3) $f'(x) = -1 + e^x + (x+2)e^x = -1 + (x+3)e^x$

d'où $f'(x) = g(x)$.

4) Il en résulte le tableau de variation de f :

5) L'équation de la tangente (T) à (C_f) en son point A d'abscisse 0 est : $y - f(0) = f'(0)x$ avec $f(0) = 2$ et $f'(0) = 2$. D'où : $y = 2x + 2$

6) A l'aide d'une calculatrice on obtient : $\alpha = -0,79$ à 10^{-2} près par défaut et $f(\alpha) = 1,34$ à 10^{-2} près par excès.

7) Voir courbe

Partie C : Calcul d'une aire.

1) $H(x) = (x+1)e^x$. $H'(x) = e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x$.

On en déduit une primitive F de f

$$F(x) = -\frac{x^2}{2} + (x+1)e^x$$

$$2) \quad A = \int_{-2}^0 f(x) dx = [F(x)]_{-2}^0 = \left[-\frac{x^2}{2} + (x+1)e^x \right]_{-2}^0$$

$$A = 1 - (-2 - e^{-2}) = 3 + e^{-2} \text{ unités d'aire.}$$

On a donc $A = (3 + e^{-2}) \times 6 \text{ cm}^2$ soit $A = (18 + 6e^{-2})$

cm^2 . C'est-à-dire $18,81 \text{ cm}^2$ à 10^{-2} près par défaut

