Problème (Extrait session Normale 2011)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = e^{x}(1 - x) + 1$

1-Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

2-Calculer la dérivée g' de g.

3-Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

4-a) Démontrer que l'équation *g(x) = 0* admet une solution unique α dans l'intervalle [1,27 ; 1,28].

b) En déduire que : $\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty;\alpha\right[, g(x) > 0 \\ \forall x \in \left]-\infty;\alpha\right[, g(x) < 0 \end{cases}$

Partie B

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{e^{x} + 1} + 2$

Soit (C_f) la représentation graphique de *f* dans un repère orthogonal (O, I, J)

Unités graphiques : 1 cm sur (OI) et 2 cm sur (OJ).

1- Déterminer la limite de *f* en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

2- a) Déterminer la limite de *f* en $-\infty$.

b) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.

c) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à (Δ).

3- a) Calculer la dérivée f' de f montrer que $\forall x \in R, f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^{x} + 1)^{2}}$

b) En déduire le signe $f'(x)$ et donner le sens de variation de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) démontrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$.

4-Tracer la courbe (C_f) et ses asymptotes dans le repère (O, I, J)

Problème (Extrait session Normale 2010)

Partie A

Soit la fonction f définie sur $\left]0 : +\infty\right[$ par : $f(x) = 3 - x - \ln x$

1-Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

2-Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f.

3-Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left]0 : +\infty\right[$

4-Justifeir que $\alpha \in [2;3]$

5-Dterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeur de x.

Partie B

Soit la fonction g définie sur $\left]0 : +\infty\right[$ par : $g(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)(2 - \ln x)$

1- Calculer $\lim\limits_{x \to 0^{+}} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^{-}} g(x)$

2-a)Calculer la dérivée g' de g et montrer que $g'(x) = \dfrac{f(x)}{x^{2}}$

b) En déduire les variations de g puis dresser le tableau de variations de g

3-Démontrer que $g(\alpha)=\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$

4-Etudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

Partie C

1-Démontrer que pour tout $x\in\,]0;+\infty[$, $g(x)=2-\ln x-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x}\ln x$

2-Soit la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=-x+\ln x$

a) Calculer h' et en déduire une primitive de la fonction $x\mapsto -\ln x$ sur $]0;+\infty[$

b) Déterminer donc une primitive de g sur $]0;+\infty[$

3-Calculer $I=\int_1^e g(x)dx$

Problème (Extrait session Normale 2009)

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=2e^{2x}-5e^{x}+2$

1- a) Résoudre l'équation : $x\in R,\ 2e^{2x}-5e^{x}+2=0$

b) Résoudre l'équation : $x\in R,\ g(x)=0$

2- démontrer que $\begin{cases}\forall x\in\,]-\infty;-\ln 2[\,\cup\,]\ln 2;+\infty[\,,g(x)>0\\ \forall x\in\,]-\ln 2;\ln 2[\,,g(x)<0\end{cases}$

Partie B

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=2x+2+\dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormée (O, I, J) d'unité 1 cm.

1- Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

2- a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (On pourra remarquer que $\forall x\in R,\dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}=\dfrac{1}{1-e^{-x}}$)

3- a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus à la question 3-a précédente.

4- Démontrer que la droite (Δ_1) d'équation $y=2x+3$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$. On admettra que la droite (Δ_2) d'équation $y=2x+2$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.

5- On considère par f' la fonction dérivée de f.

a) Calculer pour tout $x\neq 0$ f'(x) et justifier que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^{x}-1)^2}$

b) Déduire de la question 2 de la partie A le signe de f'(x) selon les valeurs de x ainsi que les variations de la fonction f.

c) Etablir le tableau de variations de la fonction f.

6- Démontrer que $\Omega\left(0,\frac{5}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe (C_f)

7- Représenter graphiquement dans le repère orthonormée (O,I,J), les droites (Δ_1) ; (Δ_2) et la courbe (C_f)

Partie C

1- Justifier que la fonction F telle que $F(x)=x^2+2x+\ln(e^x-1)$ est une primitive de f sur $]0;+\infty[$

2- Déterminer en cm² la valeur exacte puis l'arrondi d'ordre 2 de l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=\ln 2$ et $x=\ln 4$

Problème (Extrait session Normale 2007)

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=1-xe^{-x}$

1- a) Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ $\left(\text{On remarquera que } xe^{-x}=\dfrac{x}{e^x}\right)$

b) Soit g' la fonction dérivée de la fonction g.

Calculer et étudier pour tout x élément de $[0;+\infty[$ le signe de $g'(x)$

c) Etablir le tableau de variation de la fonction g.

2- En utilisant le tableau de variation de la fonction g, démontrer que $\forall x\in[0;+\infty[, g(x)>0$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=e^{-x}+\ln x$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonornal (O, I, J) d'unité graphique 4 cm.

1- a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu. .

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- Soit f' la fonction dérivée de f.

a) Calculer pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)$ et Justifier que : $\forall x\in]0;+\infty[, f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$

b) En utilisant la question 2 de la partie A, déterminer le signe de $f'(x)$

c) Etablir le tableau de variation de la fonction f.

3 a) Démontrer que l'équation $x\in]0;+\infty[, f(x)=0$ admet une solution unique qu'on notera α.

b) Justifier que $0,5<\alpha<0,6$

3- a) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$						

b) Construire la courbe (C) dans le repère (O, I, J).

Partie C

Soit G la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $G(x)=x\ln x - x$

a)Calculer $G'(x)$

b) Déterminer une primitive F de f sur $]0;+\infty[$

2) calculer en cm² la valeur exacte puis l'arrondi d'ordre 1 de l'aire S de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisse la courbe (C) les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

Problème (Extrait session Normale 2006)
A

Soit la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x^2+2-2\ln x$

1- Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.
2- Calculer g (1).
3- Déduire du tableau de variation de g, le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

B

Soit la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x}{2}+1+\frac{\ln x}{x}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (O,I,J) (unité graphique 2cm.)

1- a) Déterminer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$

2-a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y=\frac{x}{2}+1$ est asymptote à (C)
b) Etudier la position de (C) par rapport à (D)

3-a) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x\in]0;+\infty[$ et démontrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{2x^2}$
b) en déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
c) Démontrer que l'abscisse du point A de (C) où la tangente est parallèle à (D) est égale au

4- Démontrer que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un unique point B dont l'abscisse noté α appartient à l'intervalle $]0,51;0,52[$. Donner une valeur approchée par défaut de α à 10^{-2} *près*

5- Construire (C) et (D) on fera figurer les points A et B sur la courbe.

Problème (Extrait session Normale 2005)
Partie A

Soit f la fonction définie de IR vers R par $f(x)=x+1+\ln x$

1- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
2- Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$
3- Etudier le sens de variation de f sur D_f et dresser son tableau da variation.
4. a) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α que l'on notera,
b) calculer $f(0,2)$ et $f(0,3)$ en déduire que $\alpha\in]0,2;0,3[$
c) Déduire de ce qui précède le signe de $f(x)$

Partie B

Soit g la fonction $g(x)=x^2+1+2x\ln x$

On désigne par (C), la courbe de g dans un repère orthogonal (0, I, J) d'unité graphique $OI=4cm$ et $OJ=2cm$

1- Déterminer l'ensemble de définition D_g de g.
2- Calculer la limite de g en 0 et la limite de g en $+\infty$.
3- a) Sachant que g est dérivable sur D_g, calculer $g'(x)$ pour tout x élément de D_g.
b) Démontrer que $g'(x)=2f(x)$ pour tout x élément de D_g.
c) En déduire le tableau de variation de g.
4- a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
b) Tracer (C) et (T) dans le repère (O,I,J)

5- a) Soit h la fonction définir sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=x^2\ln x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x$

Démontrer que h est une primitive de g sur $]0;+\infty[$

a-Soit S la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équation $x=\frac{1}{2}$

et $x=1$.Calculer 1'aire$A$ en cm^2

Problème (Extrait session Normale 2004)
Soit la fonction

$f : R \to R$

$x \mapsto e^x - 2x + 1$

1- a) Calculer la limite de f en $-\infty$

b) Démontrer que pour tout x, élément de R ,

$f(x) = e^x\left[1 - 2xe^{-x} + e^{-x}\right]$

2- On admet que f est dérivable sur Soit f' sa fonction dérivée

a) Calculer f' (x) et étudier les variations de f sur R. puis dresser son tableau de variation dresser

b) Calculer l'arrondi d'ordre 2 de $f(\ln 2)$ puis en déduire le signe de suivant les valeurs de x

3-On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b) Démontrer que la droite (D). D'équation $y=-2x+1$ est asymptote à (C) en

c) Etudier selon les valeurs de x, les positions relatives de (D) et de (C).

d) calculer les arrondi d'ordre 2 de f(2) puis représenter graphiquement (C) ,(T) et (D) dans le repère

4) On considère la fonction

$g : R \to R$

$x \mapsto e^x - x^2 + x - 1$

a) Démontrer que $\forall x \in R, g'(x) = f(x)$

b) Calculer l'aire en cm de la partie du plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$

Problème (Extrait Deuxième session 2003)

1ère Partie

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\ln x + x - 3$

1- Calculer la limite de g en $+\infty$ et la limite de g à droite en 0

2- On admet que g est dérivables sur $]0;+\infty[$

a) calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel $x \in]0;+\infty[$

b) déterminer les variations de g et dresser son tableau de variation.

3- a) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique comprise entre 2,21 et 2,22 que l'on notera α

b) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

2ème Partie

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$ On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, I, J).Unité graphique : 4 cm

1. déterminer les limites de f à droite en 0 et en $+\infty$

2 . On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$

a) calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x strictement positif et établir que : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

b) en déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3) Démontrer que $f(\alpha)=-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$

4) on pose $\alpha = 2,2$

a) recopier et compléter le tableau ci-dessous :

x	0,25	0,5	1	2,2	4	e^2
Arrondi d'ordre 2 de $f(x)$						

Problème (Extrait session Normale 2003)

Soit f la fonction définie par $f(x)=\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

PARTIE A

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f .

3- a) Démontrer que pour tout nombre réel x élément de D_f

b) En déduire le sens de variation de f sur D_f puis dresser son tableau de variation.

4. Calculer $f(2)$ et $f(4)$

5. Le plan est rapporté à un repère orthonomal (O,I,J) d'unité 2 cm. Soit (C) la courbe représentative de f

a) Démontrer que le point $\Omega\left(\frac{1}{2};0\right)$ est centre de symétrie de (C)

b) Construire (C).

6- a) Démontrer que la restriction de f à $]1;+\infty[$ admet une bijection réciproque g.

b) Donner l'ensemble de définition de g et déterminer $g(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'ensemble de définition de g.

c) Tracer la représentation graphique de g dans le repère précédent.

PARTIE B

Soit la fonction h dérivable et définie de R vers R par : $h(x)=x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+\ln|x-1|$

1- Déterminer l'ensemble de définition D_h

2- Calculer $h'(x)$ pour tout réel x appartenant à D_h.

3-Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=2$ *et* $x=4$ donner une valeur approchée du résultat à 10^{-2} *près*

Problème (Extrait session Normale 2002)

Partie A

1 Soit la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=1-x^2-\ln x$

1) Calculer $g(1)$

2) Etudier les variations de g

3) Déduire du tableau de variation de g le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x^2-\ln x}{x}$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm)

1- a) Déterminer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

b) déterminer la limite de f en $+\infty$

2- a) démontrer que la droite (D) d'équation $y=x$ est asymptote à (C) ,

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

3- a) Calculer $f^{'}(x)$ pour tout nombre réel x démontrer que : pour tout nombre réel x strictement positif

b) En déduire le sens de variation de f et dresse son tableau de variation

5) Ecrire une équation de la tangente (T) de la courbe (C) au point d'abscisse e

6) Représenter graphiquement (C), (D) et (T) dans un repère (O, I, J)

Problème (Extrait session Normale 2001)

On considère la fonction numérique g définie sur R par $g(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}$

On note (C) la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormal (O, I, J) unité : 2cm

1- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. (on pourra poser $X=-\frac{x}{2}$ pour la limite en $+\infty$)

2- a) Calculer $g^{'}(x)$ pour tout nombre réel x et en déduire le sens de variation de g

b) dresser le tableau de variation g

3- a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses puis avec l'axe des ordonnées.

b) Démontrer que pour tout nombre réel x élément de $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$, $g(x)\geq 0$

4 - tracer la courbe (C) dans le repère (O,I,J)

5- Soit $G(x)=(ax-3)e^{\frac{-x}{2}}$ la fonction numérique définie sur R

a) Déterminer le nombre réel a pour que G soit une primitif de g sur R

b) Calculer l'aire S en cm^2 de la région du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$

Problème (Extrait session Normale 2000)

Partie A

Soit h la fonction de vers définie par $h(x)=\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$

1-: déterminer l'ensemble de définie D de h

2- Calculer les limites de h en $+\infty$, en 0 et en $-\infty$

3- la fonction h étant dérivable sur D, calculer h'(x) pour tout x élément de D

Partie B

Soit f la fonction numérique d'ensemble de définition R^* telles que : $f(x)=x-1+\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$

1- a) calculer la limite de f en 0 et interprète graphiquement le résultat

b) calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

2- la fonction f étant dérivable sur R^* vérifier que : $f'(x)=\frac{x^3+x+2}{x(1+x^2)}$ pour tout x élément de R^*

3- Etudier de signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f

4- soit (C) la courbe de f dans un repère orthonormal (O, I, J) tel que que $OI=2cm$

a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y=x-1$ est asymptote à la courbe (C)

b) Etudier les positions relatives de (D) et de (C)

5-a)Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique sur $]0;+\infty[$ que l'on notera α

b) justifier que $1,4 < \alpha < 1,5$

6- Construire la droite (D) et la courbe (C) dans le repère (O, I, J)