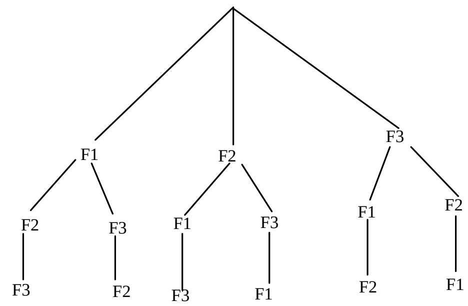
Corrigé

Exercice1

1. On peut déterminer la liste des montages différents possibles en choisissant en premier le fil à brancher sur la borne B_1, on a alors trois choix possibles, puis le fil à brancher sur la borne B_2, il reste deux choix possibles et enfin le fil à brancher sur la borne *B3*, et il n'y a plus qu'un seul choix.
On peut représenter ces différents montages en faisant l'arbre ci-dessous :
On en déduit la liste des montages différents possibles que l'on peut donner dans le tableau suivant :

Borne 1	F1	F1	F2	F2	F3	F3
Borne 2	F2	F3	F1	F3	F1	F2
Borne 3	F3	F2	F3	F1	F2	F1



Il y a donc 6 montages différents possibles .
2. On suppose que tous les branchements possibles sont équiprobables. Pour tout événement A, on a alors

$$p(A) = \frac{nombre\,d'éléments\,de\,A}{nombre\,d'éléments\,de\,E} = \frac{nombre\,d'éléments\,de\,A}{8}.$$

On sait qu'il y a un seul branchement convenable.
La probabilité que les trois fils soient convenablement branchés est donc $p(A) = \frac{1}{6}$.

3. Il y a 3 branchements pour lesquels un seul des trois fils branché à la bonne borne, ce sont les branchements $F_1F_3F_2$, $F_2F_1F_3$ et $F_3F_2F_1$.
La probabilité qu'un seul des *trois* des trois fils branché à la bonne borne est donc $p(B) = \frac{3}{6}$

4. La variable aléatoire X peut prendre les Valeurs 1000, 500 et 0
On sait que le moteur tourne à 1000 tours par minute lorsque les trois fils sont bien branchés
On a donc $p(X = 1000) = \frac{1}{6}$
On sait que le moteur tourne à 500 tours par minute lorsqu'un seul des trois fils branché à la bonne borne.
On a donc $p(X = 1000) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
Dans les autres cas, c'est-à-dire lorsque aucun des fils n'est bien branchés la variable aléatoire X prend la valeur 0. On a donc $p(X = 0) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$
La loi de probabilité de *X* est donc donnée par :

x_i	1000	500	0
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

Exercice2

1. Le gain d'un joueur est la différence entre ce qu'il reçoit et ce qu'il mise. On sait qu'il mise 10 euros.
 - S'il reçoit 20 euros son gain est de 10 euros . • S'il reçoit 10 euros son gain est nul
 - S'il reçoit 0 euro son gain est de –10 euros . On a donc: $Y = \{-10\,;0\,;10\}$

2. L'événement $(Y = -10)$ est l'événement { numéro obtenu est 2 ou 5}.On a donc

$$p(Y = -10) = p(F_2 \cup F_5) = p(F_2) + p(F_2) = p_2 + p_5 = \frac{5}{32} + \frac{5}{32} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

L'événement $(Y=0)$ est l'événement « le numéro obtenu est 3 ou 4 ».On a donc $p(Y=0)=p(F_3\cup F_4)=p(F_3)+p(F_4)=p_3+p_4=\frac{10}{32}+\frac{10}{32}=\frac{20}{32}=\frac{5}{8}$

L'événement $(Y=10)$ est l'événement { le numéro obtenues 1 ou 6 }.

On a donc $p(Y=10)=p(F_1\cup F_6)=p(F_1)+p(F_6)=p_1+p_6=\frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{2}{32}=\frac{1}{16}$

La loi de probabilité de Y est donc donnée par:

x_i	-10	0	10
$p(X=x_i)$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{16}$

3. L'espérance mathématique de Y est : $E(Y)=-10\times p(Y=-10)+0\times p(Y=0)+10\times p(Y=10)$

$E(Y)=-10\times\frac{5}{16}+0\times\frac{5}{8}+10\times\frac{1}{16}=-\frac{40}{16}=\frac{-5}{2}=-2{,}5$, on a donc $E(Y)=-2{,}5$

4. La nouvelle mise est notée m est exprimée en euros. On a alors $Y=\{-m\,;10-m\,;20-m\}$.

L'espérance mathématique de Y est : $E(Y)=-m\times p(Y=-10)+(10-m)\times p(Y=0)+(20-m)\times p(Y=10)$

$E(Y)=-m\times\frac{5}{16}+(10-m)\times\frac{5}{8}+(20-m)\times\frac{1}{16}$, on a donc $E(Y)=\frac{-5m+10(10-m)+20-m}{16}$

$E(Y)=\frac{-5m+100-10m+20-m}{16}=\frac{-16m+120}{16}$. Le jeu est équitable lorsque $E(Y)=0$ équivaut à $\frac{-16m+120}{16}=0$

c'est-à-dire $-16m+120=0 \Leftrightarrow m=\frac{120}{16}=7{,}5$. Le jeu est équitable lorsque la mise rn est de 7, 5 euros .

Exercice 3

1. Il y a dix boules dans l'urne, donc dix tirages possibles. On suppose que ces dix tirages sont équiprobables.

Pour tout événement A, on a alors $p(A)=\frac{nombre\, d'élément\, de\, A}{nombre\, d'élément\, de\, E}$.

Le joueur perd de l'argent lorsqu'il tire une boule portant le numéro 5 ou une boule portant le numéro 6.
Il y a une boule portant le numéro 5 et deux boules portant le numéro 6, donc trois tirages pour lesquels le joueur perd de l'argent. On a donc $p_1=\frac{3}{10}$

Le joueur gagne de l'argent lorsqu'il tire une boule portant un des numéros 11, 12, 13 ou 14. Il y a six boules portant un de ces numéros, donc six tirages pour lesquels le joueur perd de l'argent. On a donc $p_2=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

2. X est la variable aléatoire qui, à chaque tirage, fait correspondre le gain du joueur .

a) Les boules portent les numéros { 5; 6; 10; 11; 12; 13; 14}

Sachant que le joueur mise 10 euros, les valeurs prises par la variable aléatoire X sont les éléments de l'ensemble $E=\{-5\,;-4\,;0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$

b) La loi de probabilité de X est alors donnée dans le tableau suivant :

i	-5	-4	0	1	2	3	4
$p(X=i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

On a donc: $E(X)=-5\times p(X=-5)-4\times p(X=-4)+0\times p(X=0)+1\times p(X=1)+2\times p(X=2)+3\times p(X=3)+4\times p(X=4)$

$E(X)=-5\times\frac{1}{10}-4\times\frac{2}{10}+0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{1}{10}+4\times\frac{1}{10}=\frac{-5-8+0+3+2+3+4}{10}=-\frac{1}{10}=-0{,}1$;

E(X) représente l'espérance de gain, c'est-à-dire le gain moyen du joueur sur une partie
Un joueur perd donc en moyenne 0,1euros par partie.

d) La variance de X est donnée par : $V(X)=\sum(x_i-E(X))^2\,p(X=x_i)=\sum(x_i+0{,}1)^2\,p(X=x_i)$

$V(X)=(-4{,}9)^2\times\frac{1}{10}+(-4)^2\times\frac{2}{10}+(0{,}1)^2\times\frac{1}{10}+(1{,}1)^2\times\frac{3}{10}+(2{,}1)^2\times\frac{1}{10}+(3{,}1)^2\times\frac{1}{10}+(4{,}1)^2\times\frac{1}{10}=8{,}89$,

donc on obtient $V(X)=8{,}89$. L'écart- type est donné par: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{8{,}89}\approx 2{,}98$.

3. En remplaçant le numéro 14 par un numéro 15, on rajoutera $\frac{1}{10}$ à l'espérance mathématique et celle-ci deviendra alors nulle. Pour que le jeu soit équitable, il suffit, par exemple, de remplacer le numéro 14 par un numéro 15 .

Exercice 4

1-

	Avec le défaut E	Sans le défaut E	Total
Avec le défaut M	12 –4 = 8	188 –180 = 8	16
Sans le défaut M	184 –180 = 4	180	200–16 =184
Total	12	200–12=188	200

2. a)
Un moteur n'ayant aucun des deux défauts revient à 600 €.
. Un moteur ayant le seul défaut M revient à 600 + 100 = 700 €.
.Un moteur ayant le seul défaut E revient à 600 + 130 = 730 €
.Un moteur ayant les deux défauts M et E revient à 600 + 210=810 € . X prend donc les valeurs 600, 700, 730, 810 .
b) Le moteur étant choisi au hasard dans la production. Tous les choix sont équiprobables.
alors pour tout événement, on a: $p(A)=\frac{nombre\,d'élément\,de\,A}{nombre\,d'élément\,de\,E}$
X prend la valeur 600 lorsque le moteur n'a aucun des deux défauts. On sait que sur les 200 moteurs, 180 n'ont aucun des deux défauts. Comme la répartition du tableau reflète celle de l'ensemble de la production, on a
: $p(X=600)=\frac{180}{200}$. Donc $p(X=600)=0,9$

x_i	600	700	730	810
$p(X=x_i)$	0,9	0,04	0,02	0,04

c) De même on a : $p(X=700)=\frac{8}{200}=0,04$; $p(X=730)=\frac{4}{200}=0,02$ et
$p(X=810)=\frac{8}{200}=0,04$
d) L'espérance mathématique $E(X)=0,9\times p(X=600)+0,04\times p(X=700)+0,02\times p(X=730)+0,04\times p(X=810)$:
$E(X)=0,9\times600+0,04\times700+0,02\times730+0,04\times810$, on obtient : $E(X)=615$
e) Le prix de revient moyen d'un moteur étant de 615, pour que l'usine réalise un bénéfice moyen de 85 € par moteur, il faut que chaque moteur soit vendu: 615 + 85 = 700. "
Le prix de vente d'un moteur sera de 700 €.

Exercice 5-solution

1.
a) soit A l'événement « obtenir un bouton à 2 trous » , donc $P(A)=\frac{21+24+18}{150}=\frac{63}{150}=\frac{21}{50}=0,42$
b) soit B l'événement « obtenir Un bouton de 14mm de diamètre» $P(B)=\frac{18+12+27}{150}=\frac{57}{150}=\frac{19}{50}=0,38$
c) soit C l'événement « obtenir Un bouton à 3 trous de 10mm de diamètre» $P(C)=\frac{15}{150}=\frac{1}{10}=0,1$
d) soit D l'événement « obtenir Un bouton de diamètre inférieur à 12mm »
$P(D)=\frac{21+24+12+15+9}{150}=\frac{81}{150}=\frac{27}{50}=0,54$
2.
a) $\{X=6\}$ correspond à l'événement « Un bouton de 6mm de diamètre », donc $P(X=6)=\frac{33}{150}=\frac{11}{50}=0,22$
b) soit X la variable aléatoire qui à chaque bouton tiré associe son diamètre en mm ,donc : $X=\{6;10;14;18\}$

x_i	6	10	14	18
$P(\{X=x_i\})$	$\frac{33}{150}=\frac{11}{50}$	$\frac{48}{150}=\frac{8}{25}$	$\frac{57}{150}=\frac{19}{50}$	$\frac{12}{150}=\frac{2}{25}$

$\sum_{i=1}^{i=4}P(X=x_i)=\frac{33}{150}+\frac{48}{150}+\frac{57}{150}+\frac{12}{150}=\frac{33+48+57+12}{150}=\frac{150}{150}=1$
, donc X définie bien une loi de probabilité

c) $E(X)=\dfrac{6\times33+10\times48+14\times57+18\times12}{150}=\dfrac{1692}{150}=11,26$

d) $E(X)=\dfrac{36\times33+100\times48+196\times57+324\times12}{150}-\left[E(X)\right]^2=\dfrac{21048}{150}-\left(\dfrac{1692}{150}\right)^2=140,32-127,24=13,08$

d'où $\sigma_X=\sqrt{13,08}\approx3,6$ à 10^{-2} près.

Exercice 6

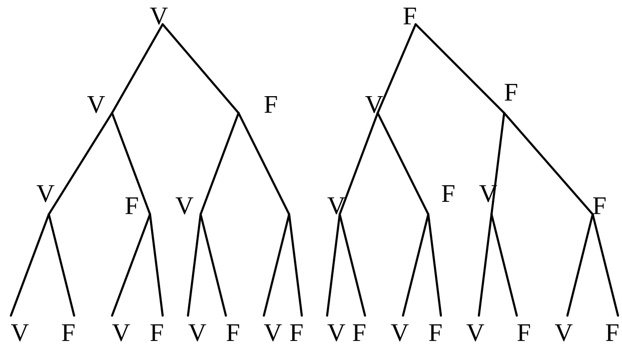
2) a) $p=\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}$ b) $p'=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$ c) $p''=\dfrac{1}{16}$

3) a) X peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 ou 4.

b) $p(\{x=0\})=\dfrac{1}{16}$ $p(\{x=1\})=p'=\dfrac{1}{4}$

$p(\{x=2\})=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$ $p(\{x=3\})=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$

$p(\{x=4\})=p''=\dfrac{1}{16}$



D'où la loi de probabilité

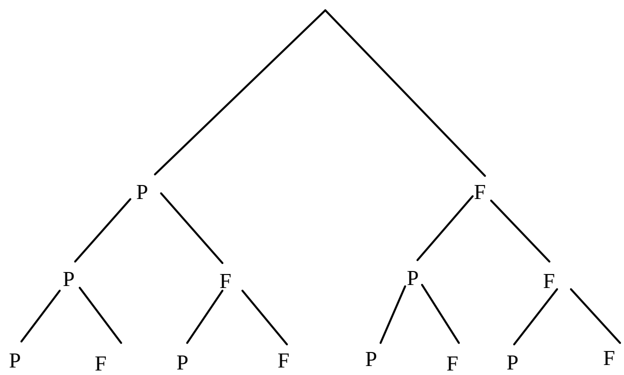
k	0	1	2	3	4
$p(\{x=k\})$	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{4}{16}$	$\dfrac{6}{16}$	$\dfrac{4}{16}$	$\dfrac{1}{16}$

c) $E(x)=\dfrac{1}{16}(4+12+12+4)=\dfrac{32}{16}=2$

4) La probabilité qu'un candidat soit reconnu apte est: $p(X=3)+p(X=4)=\dfrac{5}{16}$

Exercice 7

1. On peut représenter l'épreuve qui consiste à lancer trois fois la pièce par l'arbre ci-dessous.
On observe alors qu'il existe 8 éventualités.
L'univers est: E = {PPP; PPF; PFP; PFF; FPP; FPF; FFP; FFF} 2. On calcu1e pour chaque éventualité la somme gagnée ou perdue, on obtient :



- PPP : –1– 1– 1 = –3
- PPF: –1–1+3= 1
- PFP : –1 + 3 –1 = 1 ,
- PFF : –1+3+3 =5
- FPP : 3 – 1– 1 = 1
- FPF: 3–1+3=5
- FFP: 3+3–1=5
- FFF: 3+3+3 = 9

La variable aléatoire X prend donc les valeurs { -3 ; 1 ; 5 ; 9 }.
La pièce étant supposée bien équilibrée, on peut supposer que la probabilité est uniforme.
Pour tout événement A, on a donc $p(A)=\dfrac{nombre\,d'\acute{e}l\acute{e}ments\,de\,A}{nombre\,d'\acute{e}l\acute{e}ments\,de\,E}=\dfrac{nombre\,d'\acute{e}l\acute{e}ments\,de\,A}{8}$.

1 . On a $p(X=-3)=\frac{1}{8}$; $p(X=1)=\frac{3}{8}$

$p(X=5)=\frac{3}{8}$ $p(X=9)=\frac{1}{8}$

La loi de probabilité de X est donc donnée par :

x_i	-3	1	5	9
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

3. On a: $E(X)=-3\times p(X=-3)+1\times p(X=1)+5\times p(X=5)+9\times p(X=9)$

donc $E(X)=-3\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+5\times\frac{3}{8}+9\times\frac{1}{8}$ et $E(X)=\frac{-3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{15}{8}+\frac{9}{8}=\frac{24}{8}=3$

$V(X)=(-3-3)^2\times\frac{1}{8}+(1-3)^2\times\frac{3}{8}+(5-3)^2\times\frac{3}{8}+(9-3)^2\times\frac{1}{8}=\frac{24}{8}=3$

$V(X)=\frac{36}{8}+\frac{12}{8}+\frac{12}{8}+\times\frac{36}{8}=\frac{96}{8}=12$, donc $V(X)=12$. On a: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

4. $p(X\le 1)=p([X=-3)\cup(X=1)]$ donc $p(X\le 1)=p([X=-3)\cup(X=1)]=p(X=-3)+p(X=1)$

(les événements *(X* = -3) et *(X* = 1) sont incompatibles)

Donc $p(X\le 1)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, donc $p(X\le 1)=\frac{1}{2}$.

La fonction de répartition *F* de la variable aléatoire *X* est définie par :
$F(x)=p(X\le x)$ pour tout réel *x*.

Pour $x\in]-\infty;-3[$ $F(x)=0$

♦pour $x\in[-3;1[$.

$F(x)=p(X=-3)=\frac{1}{8}$

♦Pour $x\in[1;5[$ $F(x)=p(X\le 1)=\frac{1}{2}$

♦pour $x\in[5;9[$ $F(x)=p(X\le 5)=\frac{7}{8}$

♦pour $x\in[9;+\infty[$ $F(x)=p(X\le 9)=1$

On peut alors tracer la courbe
Représentant la fonction de répartition de *F* :