

Problème 1

A - En utilisant le graphique on a : $g(1) = 0$ signifie $1 + a + b = 0$ ou encore $a + b = -1$.

$g(3) = 0$ signifie $\frac{9+3a+b}{3} = 0$ ou encore $3a+b = -9$

pour trouver les valeurs de a et b on doit résoudre un système d'équations : $\begin{cases} a+b=-1 \\ 3a+b=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a-b=1 \\ 3a+b=-9 \end{cases}$

$2a = -8$ et $a = -4$; $b = -1+a = -1+4=3$, d'où $a = -4$ et $b = 3$ et $g(x) = \frac{x^2-4x+3}{x} = x-4+\frac{3}{x}$.

B- $h(x) = x^2 + 1 - 2\ln x$; $h'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2-2}{x}$; $h'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$. Comme $x \in]0; +\infty[$ $\frac{2(x+1)}{x} > 0$

Donc le signe de $h'(x)$ dépend du signe de $(x-1)$,
d'où le tableau de variation

La fonction h admet un minimum égal à $h(1) = 2 > 0$.

Par conséquent $h(x) > 0$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		-	
$h(x)$		2	

C- $f(x) = x - 4 + \frac{1+2\ln x}{x}$

1- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-4) = -4$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+2\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+2\ln x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+2\ln x) = 1 + 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = 1 - \infty = -\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$. on déduit que la droite d'équation : $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe C au voisinage de 0.

2- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$, donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

3- $f'(x) = 1 + \frac{2-(1+2\ln x)}{x^2}$; $f'(x) = \frac{x^2+2-(1+2\ln x)}{x^2}$; $f'(x) = \frac{x^2+1-2\ln x}{x^2}$ et $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$.

Le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ dépend du signe de $h(x)$;

or $h(x) > 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. Il s'ensuit que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$ et par conséquent la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4- Soit $k(x) = f(x) - g(x)$; $k(x) = x - 4 + \frac{1+2\ln x}{x} - (x - 4 + \frac{3}{x})$.

$k(x) = x - 4 + \frac{1+2\ln x}{x} - x + 4 - \frac{3}{x}$, $k(x) = \frac{1+2\ln x}{x} - \frac{3}{x} = \frac{2\ln x - 2}{x}$. calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x - 2}{x} = -2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 0$.

On déduit que la courbe C est une courbe asymptote à la courbe Γ au voisinage de $+\infty$.

b- Trouver les coordonnées du point d'intersection des courbes Γ et C revient à résoudre l'équation $f(x) = g(x)$

c'est-à-dire $f(x) - g(x) = 0$ ou encore $k(x) = 0$. donc $\frac{2\ln x - 2}{x} = 0$. $x \neq 0$ et $2\ln x - 2 = 0$.

$2\ln x = 2$ équivaut à $\ln x = 1 = \ln e$ et $x = e$. $y = f(e) = e - 4 + \frac{3}{e} = g(e)$. $A(e; e - 4 + \frac{3}{e})$.

c- Déterminer les positions relative de la courbe Γ par rapport à la courbe C , revient à étudier le signe de

$k(x) = f(x) - g(x)$, c'est-à-dire le signe de $\frac{2\ln x - 2}{x}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$, donc il faut étudier de $2\ln x - 2$.

$2\ln x - 2 > 0$; $2\ln x > 2$, $\ln x > 1 = \ln e$, donc $x > e$. On déduit donc que sur l'intervalle $]e; +\infty[$

la courbe Γ est au dessus de courbe C . on démontre de même que sur l'intervalle $]0; e[$ la courbe Γ est en dessous de courbe C .

D- soit $K(x) = (\ln x - 1)^2$. On pose $u(x) = \ln x - 1$ donc $K(x) = u(x)^2$ et $K'(x) = 2u'(x)u(x)$. Donc

$K'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times (\ln x - 1) = \frac{2\ln x - 2}{x} = k(x)$. on déduit que $K(x)$ est une primitive de $k(x) = f(x) - g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

3- $A = 4 \times [K(e^2) - K(e)]$. $K(e^2) = (\ln e^2 - 1)^2 = (2\ln e - 1)^2 = (2 - 1)^2 = 1$ et $K(e) = (\ln e - 1)^2 = (1 - 1)^2 = 0$.

On déduit que $A = 4 \times (1 - 0) = 4\text{cm}^2$.

