

PROBLEME 5

Partie A : Etude du signe de $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$. ($\ln x$ désigne le logarithme népérien de x)

1. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction g . (Les limites ne sont pas demandées). Calculer $g(1)$.
3. Dédire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie B : On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}$.

On appelle (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (unités : 3 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées.)

1.a Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

1.b Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à (C) .

Y a-t-il une autre asymptote à (C) ? Si oui, donner son équation.

1.c Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

1.d En utilisant les résultats précédents, déterminer le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de f .

1.e Calculer les coordonnées du point d'intersection entre l'asymptote (D) et la courbe (C) .

Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D) .

1.f Tracer dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C) et les droites (D) .

2.a Montrer que la fonction H définie par : $H(x) = \frac{-1}{x}(1 + \ln x)$ est une primitive de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$

par : $h(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

2.b Soit Δ le domaine plan limité par (D) , (C) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$. Hachurer Δ ; calculer la valeur exacte de l'aire, en cm^2 , de Δ ; en donner une valeur approchée au mm^2