PROBLÈME 8

Partie A

1) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]\,0; +\infty\,[$ par : $f(x) = ax^2 + bx - 2\ln x$, où a et b sont deux nombres réels. On appelle C la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.
Sachant que la courbe C passe par le point A (1 ; $-\dfrac{13}{2}$) et que le coefficient directeur de la tangente en A est égal à –6, Déterminer les valeurs des nombres a et b.

2) Pour la suite du problème, on prendra $f(x) = -2\ln x + \dfrac{5}{2}x^2 - 9x$.

a) Déterminer la limite en 0 de la fonction f. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

b) Vérifier que l'on peut écrire : $f(x) = x^2\left(-2\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{5}{2} - \dfrac{9}{x}\right)$. En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f.

Partie B

1) On désigne par f' la fonction dérivée de J sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty[$.

a) Calculer $f'(x)$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction J sur l'intervalle $]\,0; +\infty\,[$

2) a) Démontrer que, dans l'intervalle [3; 4], l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α .

b) Donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement d'amplitude 0,01 de α .

3) Déterminer une équation de la droite D tangente à la courbe C au point d'abscisse 1.

4) Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la droite D et la courbe C.

Partie C

1) On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty\,[$ par : $g(x) = x\ln x - x$.
Expliciter la dérivée g' de la fonction g.

2) Déduire de la question précédente une primitive F de la fonction J sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

3) On appelle A la partie du plan située entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 5$ (α est défini à la question B. 2).Hachurer sur la figure la partie A.

b) On désigne par A l'aire, en unités d'aire, de la partie A. Calculer A en fonction de α puis calculer une valeur approchée de A en prenant 3,88 comme valeur approchée de α .