

PROBLEME 12

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln x - 2x^2 - 1$
(où $\ln$ désigne le logarithme népérien).

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. Etudier son signe sur $]0; +\infty[$.
2. Etudier le sens de variation de la fonction g (on ne demande pas les limites en 0 et en $+\infty$).
3. En déduire pour tout $x \in]0; +\infty[$ le signe de $g(x)$.

Partie B

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = -2x + 1 - \frac{\ln x}{x}$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique : 2 cm .

1. Calculer $f(1)$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
4. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -2x + 1$ est asymptote à la courbe C .
5. Etudier la position relative de C et Δ sur $]0; +\infty[$
6. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. f' est la fonction dérivée de la fonction f

Vérifier que pour tout x de $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. Déduire de la partie A le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.

7. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C au point d'abscisse 1.
8. Tracer C , (T) et les asymptotes à la courbe C dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie C :

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$

1. On désigne par h' la fonction dérivée de la fonction h . Calculer $h'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. Hachurer sur le graphique la partie E du plan limitée par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites (d_1) et (d_2) d'équations : $(d_1) : x = 1$ et $(d_2) : x = e$.
4. Calculer la valeur exacte A de l'aire de ce domaine exprimée en cm^2 . Donner la valeur exacte .