Problème 16

Partie A

soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\ln x-1-\frac{9}{2}x^2$.

Pour tout réel $x\in]0;+\infty[$, $g'(x)=\frac{1}{x}-9x=\frac{1-9x^2}{x}=\frac{(1-3x)(1+3x)}{x}$. Or $x>0$ donc $g'(x)=0$

Si et seulement si, $1-3x=0$ ou $1+3x=0$ c'est-à-dire $x=\frac{1}{3}$ ou $x=-\frac{1}{3}$, mais $-\frac{1}{3}\notin]0;+\infty[$

Donc $g'(x)>0$ sur $\left]0;\frac{1}{3}\right[$ et $g'(x)<0$ sur $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$.

x	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	$-\ln 3-\frac{3}{2}$	$\searrow$

3- la fonction g admet un maximum sur $]0;+\infty[$,

égal à $-\ln 3-\frac{3}{2}<0$, donc pour tout réel appartenant à $]0;+\infty[$,

$g(x)$ est strictement négatif.

Partie B

soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=-9x+5-2\frac{\ln x}{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}-9x+5=5$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\times\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}-2\frac{\ln x}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$.

La droite D d'équation x = 0 est asymptote verticale à la courbe C au voisinage de 0.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-9x+5=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

Pour tout réel $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=-9-2\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=-9-\frac{2-2\ln x}{x^2}=\frac{-9x^2-2+2\ln x}{x^2}=\frac{2g(x)}{x^2}$.

Or $x^2>0$, donc $f'(x)$ est strictement négatif sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variations

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$	$-\infty$

2/a)soit D la droite d'équation $y=-9x+5$. On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=f(x)-(-9x+5)$.

pour tout $x\in]0;+\infty[$; $h(x)=-9x+5-2\frac{\ln x}{x}-(-9x+5)=-2\frac{\ln x}{x}$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, donc

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ .la droite D est donc asymptote oblique à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

b) pour le point d'intersection de C et D , on a $h(x)=0$, c'est-à-dire $\ln x=0$, soit $x=1$, les coordonnées de ce point sont $(1;-4)$.

c) si $x=1$, on vient de voir que C et D se coupent ;

si $x>1$ on a : $\ln x>0$ et donc $h(x)<0$, d'où la courbe C est en dessous de la droite D

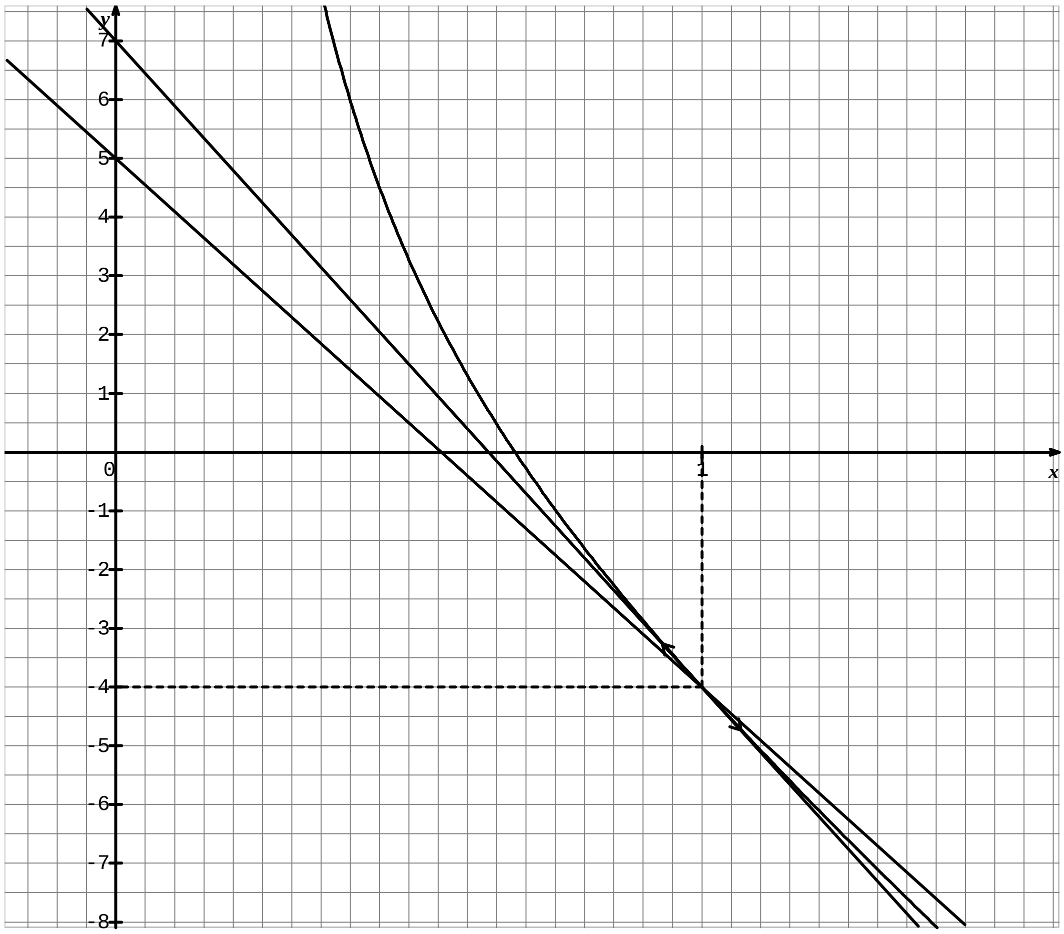
si $0<x<1$, on a : $\ln x<0$ et donc $h(x)>0$, d'où la courbe C est au dessus de la droite D.

3°-

Tangente T à la courbe C au point A d'abscisse 1

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$; $f'(1)=-11$ et $f(1)=-4$, donc $y=-11(x-1)-4$, soit $y=-11x+7$

b)courbes



4) la fonction f est dérivable est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, donc en particulier sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$, de plus $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+4\ln 2>0$ et $f(1)=-4<0$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires , il existe un seul réel α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;1\right]$ tel que $f(\alpha)=0$.

Encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.on a $f(0,6)>0$ et $f(0,7)<0$, donc $0,6<\alpha<0,7$

Puis $f(0,68)>0$ et $f(0,69)<0$ donc $0,68<\alpha<0,69$.