

PROBLEME-16

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln x - 1 - \frac{9}{2}x^2$

(où $\ln$ désigne le logarithme népérien).

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. Etudier son signe sur $]0; +\infty[$.
2. Etudier le sens de variation de la fonction g (on ne demande pas les limites en 0 et en $+\infty$).
3. En déduire pour tout $x \in]0; +\infty[$ le signe de $g(x)$.

Partie B

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = -9x + 5 - \frac{2\ln x}{x}$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote que l'on précisera.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (Etudier la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$).
4. soit (Δ) la droite d'équation $y = -9x + 5$. On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = f(x) - (-9x + 5)$.
 - a. Démontrer que (Δ) est asymptote à la courbe C .
 - b. Calculer les coordonnées du point d'intersection de C et Δ
 - c. Etudier la position relative de C et Δ sur $]0; +\infty[$
5. a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. f' est la fonction dérivée de la fonction f
 - b. Vérifier que pour tout x de $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^2}$.
 - c. Déduire de la partie A le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
6. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C au point A d'abscisse 1.
7. Tracer C , (T) et les asymptotes à la courbe C dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
8. Démontrer qu'il existe un seul réel α de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

Partie C :

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = (\ln x)^2$

1. On désigne par h' la fonction dérivée de la fonction h .
Calculer $h'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. Hachurer sur le graphique la partie E du plan limitée par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites (d_1) et (d_2) d'équations : $(d_1) : x = 1$ et $(d_2) : x = e$.
4. Calculer la valeur exacte A de l'aire de ce domaine exprimée en cm^2 . Donner la valeur exacte.