

Problème 18

Partie A $f(x) = x^2 + ax + b - 2 \ln x$

Déterminons les valeurs de a et de b tels que la courbe C d'équation $y=f(x)$ passe par $A(1 ; -3)$ et que la tangente à C en A soit parallèle à l'axe Ox .

On doit avoir : $f(1) = -3$ et $f'(1) = 0$. Or $f'(x) = 2x + a - \frac{2}{x}$

On en déduit : $f(1) = 1 + a + b - 2 \ln 1 = a + b - 1 = -3$ donc : $a + b = -4$ $f'(1) = 2 + a - \frac{2}{1} = a = 0$

donc : $a = 0$ et $b = -4$. La fonction f cherchée est donc définie par : $f(x) = x^2 - 4 - 2 \ln x$.

Partie B

1.a) On a clairement : $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 4) = -4$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

On en déduit que la droite d'équation : $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe au voisinage de 0 (l'axe Oy est asymptote à C).

2.a) Vérifier pour $x > 0$: $f(x) = x \left(x - \frac{4}{x} - \frac{2 \ln x}{x} \right)$. C'est évident !

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Donc :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{4}{x} - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. On peut écrire : $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}$.

Signe de $f'(x)$. Tableau de variation de f .

x	0	1	$+\infty$
$x-1$		-	0
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	$+\infty$	-3	$+\infty$

4. Signe de $f(x)$ lorsque $x \in [1; 2]$.

On sait que $f(1) = -3$. Par ailleurs $f(2) = 2^2 - 4 - 2 \ln 2 = -2 \ln 2$.

Donc $f(2) < 0$. La fonction f étant dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $[1; 2]$ on en déduit qu'elle est strictement négative sur cet intervalle.

5. Courbe C .

Partie C. Calcul de $H'(x)$. On a : $H(x) = x \ln x - x$. Donc : $H'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

En déduire une primitive de f sur I . Une primitive de f sur I est définie par :

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 4x - 2(x \ln x - x) \text{ ou encore : } F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x - 2x \ln x$$

Calcul de l'aire de Δ . La fonction f étant négative sur l'intervalle $[1; 2]$,

L'unité d'aire vaut 4 cm^2 Donc on peut écrire que cette aire est donnée

$$\text{par : } \text{Aire}(\Delta) = 4 \times \left(-\int_1^2 f(x) dx \right) = 4 \times \left[-F(x) \right]_1^2 = 4 \times [F(1) - F(2)] \text{ Donc : } F(1) = \frac{1}{3} - 2 - 2 \ln 1 = -\frac{5}{3} \text{ et}$$

$$F(2) = \frac{8}{3} - 4 - 4 \ln 2, \text{ donc } \text{Aire}(\Delta) = 4 \times [F(1) - F(2)] = 4 \times \left(-\frac{5}{3} - \frac{8}{3} + 4 + 4 \ln 2 \right) = 4 \left(4 \ln 2 - \frac{1}{3} \right)$$

$$\text{Aire}(\Delta) = 16 \ln 2 - \frac{4}{3} \approx 9,75 \text{ cm}^2.$$

