

PROBLÈME 21

Le but du problème est l'étude de la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 - \frac{\ln x}{x}$, où $\ln x$ désigne le logarithme népérien de x . On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique : 2 cm.

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 1 + \ln x$.

1. Étudier les variations de la fonction g . Les limites aux bornes ne sont pas demandées.
2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

1. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle $]0 ; +\infty[$. En déduire l'existence d'une droite asymptote à la courbe C que l'on précisera.

2. Démontrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. En déduire le tableau de variations de la fonction f .

3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$.

Construire sa courbe représentative P dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

- a. Déterminer la limite de $[f(x) - h(x)]$ en $+\infty$.
- b. Déterminer le signe de $[f(x) - h(x)]$.

Que peut-on en déduire pour la position relative des deux courbes C et P ?

4. Tracer la courbe C sur la feuille ci-après (à rendre avec la copie).

Partie C

1. Déterminer une primitive de la fonction : $x \rightarrow \frac{1}{x} \ln x$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

2. On appelle S l'aire en cm^2 , de la partie du plan limitée par les deux courbes C et P et les droites d'équations $x=1$ et $x=4$. Donner la valeur exacte de S puis la valeur arrondie au mm^2 .