CORRIGE

Exercice 8

1. La production annuelle d'une entreprise A est en progression arithmétique, donc on a :

$p_n = p_{n-1} + (n-1)r$ et on a aussi $S = \dfrac{n(p_1 + p_n)}{2}$.

Or $p_6 = 12000$ et $S_A = 58500$ il s'ensuit $\begin{cases} p_6 = p_1 + (n-1)r \\ S_A = \dfrac{6}{2}(p_1 + p_6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12000 = p_1 + 5r \\ 58500 = 3(p_1 + 12000) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1200 = p_1 + 5r \\ 58500 = 3p_1 + 36000 \end{cases}$. $3p_1 = 58500 - 36000 = 22500$ donc $p_1 = \dfrac{22500}{3} = 7500$.

$12000 = p_1 + 5r$, donc $r = \dfrac{12000 - p_1}{5} = \dfrac{12000 - 7500}{5} = \dfrac{4500}{5} = 900$

(p_n) est une suite arithmétique de premier terme $p_1 = 7500$ et de raison $r = 900$.

b. $p_n = 2p_1$, donc $p_1 + (n-1)r = 2p_1$, d'où $(n-1)900 = 2p_1 - p_1 = p_1 = 7500$, donc $n - 1 = \dfrac{7500}{900} = \dfrac{75}{9}$

et enfin $n = \dfrac{75}{9} + 1 = \dfrac{84}{9} \approx 9{,}3$, comme n est entier ,donc $n = 10$.

$p_{10} = p_1 + (10-1)900 = 7500 + 900 \times 9 = 15600$ $\quad\quad$ $p_9 = p_1 + (9-1)900 = 7500 + 900 \times 8 = 14700$.

2°. $q_1 = 7500$; $q_2 = q_1 + \dfrac{10}{100}q_1 = 1{,}1q_1 = 1{,}1 \times 7500 = 8250$, donc $\dfrac{q_2}{q_1} = 1{,}1$, il en résulte que (q_n)est une suite géométrique de raison $b = 1{,}1$ .Par définition $q_n = bq_{n-1} = q_1 b^{n-1}$ et on a $q_n = (1{,}1)^{n-1} q_1$.

$q_6 = (1{,}1)^5 \times 7500 = 12078{,}8$. $\quad q_n = 2q_1$ donc $\dfrac{q_n}{q_1} = 2$ et $(1{,}1)^{n-1} = 2$. Or $(1{,}1)^7 \approx 1{,}94$ et $(1{,}1)^8 \approx 2{,}11$

Donc par passage au double , on a $n - 1 = 8$, c'est-à-dire $n = 9$.

$q_8 = (1{,}1)^7 \times 7500 \approx 14615$ et $q_9 = (1{,}1)^8 \times 7500 \approx 16076$. $S_B = q_1 \dfrac{b^6 - 1}{b - 1} = 7500 \times \dfrac{(1{,}1)^6 - 1}{0{,}1} \approx 57867$.

Exercice 9

a) le nombre d'atomes de carbone 14 diminue de 1,24 % par siècle donc

$N_1 = N_0 - \dfrac{1{,}24}{100} \times N_0 = \left(\dfrac{100}{100} - \dfrac{1{,}24}{100}\right) N_0 = \dfrac{98{,}76}{100} N_0$. $N_1 = 0{,}9876 N_0$.

$N_{k+1} = N_k - \dfrac{1{,}24}{100} \times N_k = \left(\dfrac{100}{100} - \dfrac{1{,}24}{100}\right) N_k = \dfrac{98{,}76}{100} N_k$ ce qui donne $N_{k+1} = 0{,}9876 N_k$.

b) On reconnaît dans la formule précédente , la formule $u_{n+1} = bu_n$, pour tout entier k , formule de récurrence qui définit une suite géométrique de raison le réel b .

(N_k) est la suite géométrique de raison $b = 0{,}9876$ et de premier terme N_0. Il en résulte le terme général de la suite $N_k = N_0 \times b^k$ d'où $N_k = (0{,}9876)^n N_0$.

c) Deux modèles permettent de déterminer le sens de variation de la suite (N_k) :

la première méthode consiste le signe de la différence $N_{k+1} - N_k$: $N_{k+1} - N_k = 0{,}9876 N_k - N_k = -0{,}0124 N_k$

Tous les termes N_k étant positifs , quel que soit l'entier k , la différence est négative , la suite (N_k) est décroissante .La deuxième méthode est possible dans le cas où tous les termes N_k et alors on étudie le rapport $\dfrac{N_{k+1}}{N_k} = 0{,}9876 < 1$ et on obtient : $N_{k+1} < N_k$ et par conséquent : la suite (N_k) est décroissante .

2. La teneur en carbone 14 étant de 40 % de celle actuelle , on peut écrire : $N_{k+1} = 0,4N_k$ ce qui traduit par l'équation : $\left(0,9876\right)^k N_0 = 0,4N_0 \Leftrightarrow \left(0,9876\right)^k = 0,4 \Leftrightarrow \ln\left(0,9876\right)^k = \ln 0,4 \Leftrightarrow k\ln\left(0,9876\right) = \ln 0,4$

$k = \left(\ln(0,4)\right)/\ln\left(0,9876\right) \approx 73,435$. Les fragments ont un peu plus de 73 siècles.

On utilise la calculatrice pour calculer $\left(0,9876\right)^{73} < 0,4$ et $\left(0,9876\right)^{74} > 0,4$.

Exercice 10

1. En 2006 , son salaire mensuel vaut 1200 € donc son salaire annuel vaut $12\times 1200 = 14400€$.
   Ainsi $u_0 = v_0 = 14400$ (il n'y a pas encore d'augmentation).
2. avec la formule 1 , le salaire mensuel devient en 2007 : $1200 + 20 = 1220€$, donc le salaire annuel est : $u_1 = 12\times 1220 = 14640€$. Avec la formule 2 , le salaire mensuel devient en 2007 : $1200\times 1,015 = 1218€$,
   Donc le salaire annuel $v_1 = 12\times 1218 = 14616€$.
3. D'une année à l'autre , avec la formule 1 , le salaire annuel est augmenté de $12\times 20 = 240€$. Ainsi $u_{n+1} = u_n + 240$. La suite (u_n)est donc une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 14400€$ et raison $a = 240$. D'une année à l'autre , avec la formule 2 , le salaire mensuel est multiplié par 1,015 .
   Le salaire annuel est également multiplié par 1,015 . v_n est donc une suite géométrique de premier terme $v_0 = 14400$ et de raison 1,015.
4. comme (u_n) est une suite arithmétique de raison $a = 240$; $u_n = u_0 + na = 14400 + 240n$.
   comme (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,015$; $v_n = v_0\times q^n = 14400\times\left(1,015\right)^n$.
5. En $2018 = 2008 + 10$, les salaires correspondantes à u_{10} et v_{10}
   $v_{10} = v_0\times q^{10} = 14400\times\left(1,015\right)^{10} \approx 16711,79€$ et $u_{10} = u_0 + na = 14400 + 240\times 10 = 16800€$ ($v_{10} < u_{10}$)
   Donc en 2018 la formule A est plus avantageuse que la formule B
   En $2028 = 2008 + 20$, les salaires correspondantes à u_{20} et v_{20}
   $v_{20} = v_0\times q^{20} = 14400\times\left(1,015\right)^{20} \approx 19394,71€$ et $u_{20} = u_0 + 20a = 14400 + 240\times 20 = 19200€$ ($u_{20} < v_{20}$)
   Donc en 2028 la formule B est plus avantageuse.
6. Avec la formule1 , l'employé aurait après 42 ans de travail : $S_{41} = \dfrac{(41+1)\left(u_0 + u_{41}\right)}{2}$
   Or $u_{41} = u_0 + 41a = 14400 + 240\times 41 = 24240€$, donc $S_{41} = \dfrac{(42)\left(14400 + 24240\right)}{2} = 21\times 38640 = 811440€$.
   Avec la formule 2 , l'employé aurait gagné pendant toute sa carrière :
   $T_{41} = v_0 + v_1 + ... + v_{40} + v_{41} = 14400\times\left(\dfrac{\left(1,015\right)^{n+1} - 1}{1,015 - 1}\right) = \dfrac{14400}{0,015}\left[\left(1,015\right)^{42} - 1\right] \approx 834093,23€$.
   Enfin , sur l'ensemble de sa carrière , c'est la formule B la plus intéressante .
   Sur ses 42 ans de carrière , il gagnerait environ : $834093 - 811440 = 22653€$ avec la formule B.

Exercice 12

1. a. On a $2069 - 2056 = 13$; $2082 - 2069 = 13$ et $2095 - 2082 = 13$.
   La suite est donc une suite arithmétique de raison 13.
   b. On trouve de même que la suite est donc une suite arithmétique de raison 35.
2. Si $u_1 = 1770$, on sait que $u_n = u_1 + (n-1)\times 35$. Donc $2050 = 1770 + 35n - 35 \Leftrightarrow 35n = 315 \Leftrightarrow n = 9$
   2050 est donc le 9e terme de la suite.
3. a. Le premier terme étant A_1, on a $A_n = A_1 + (n-1)\times 13 = 2056 + 13n - 13 = 2043 + 13n$

b. De même $B_n = B_1 + (n-1)\times 35 = 1770 + 35n - 35 = 1735 + 35n$.

c. Il faut résoudre dans $\mathbb{N}$, l'inéquation :

$1735 + 35n > 2043 + 13n \Leftrightarrow 35n - 13n > 2043 - 1735 \Leftrightarrow 22n > 308 \Leftrightarrow n > 14$

La production de la chaîne B sera supérieure à celle de la chaîne A à partir de 14 ans soit en février 2010.

Exercice 13

Partie 1

1. On considère la suite arithmétique (θ_n), de raison $\dfrac{\pi}{2}$ et de premier terme $\theta_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Exprimer θ_{n+1}, en fonction de θ_n .puis θ_n en fonction de n.

$\theta_{n+1} = \theta_n + \pi/2$ et $\theta_n = \theta_0 + n\pi/2 = \pi/4 + n\pi/2$

2. On considère la suite géométrique ρ_n de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $\rho_0 = 8$.

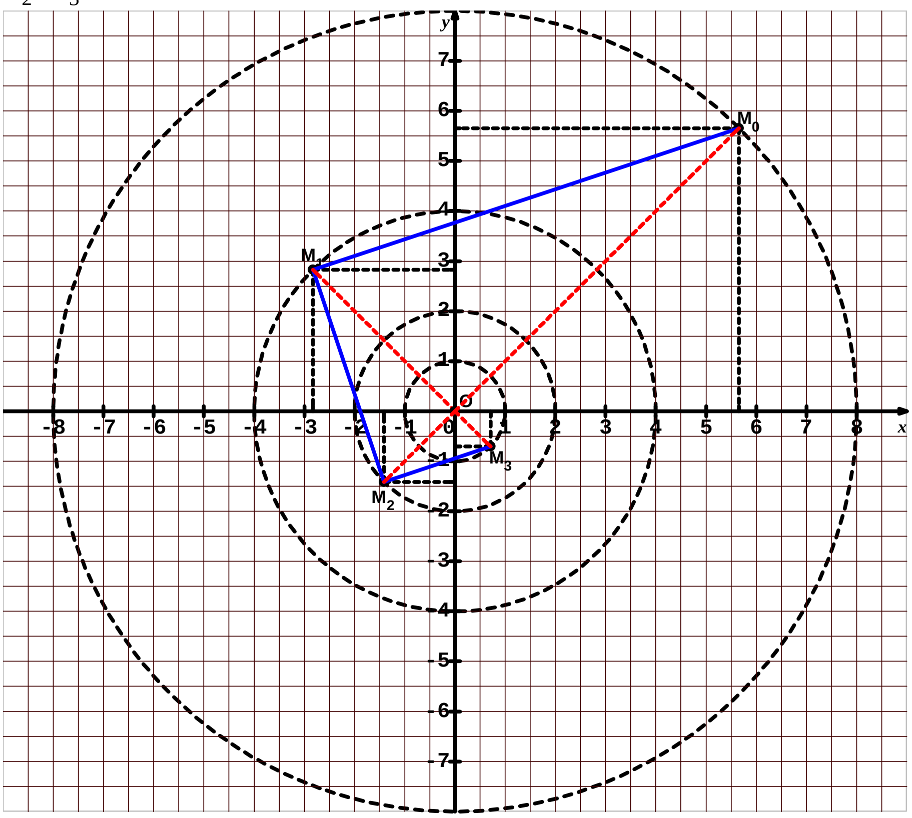
Exprimer ρ_{n+1} en fonction de ρ_n ,puis ρ_n en fonction de n : $\rho_{n+1} = \dfrac{1}{2}\rho_n$ et $\rho_n = \rho_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 8\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

Partie II

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3
θ_n	$\theta_0 = \dfrac{\pi}{4}$	$\theta_1 = \dfrac{3\pi}{4}$	$\theta_2 = \dfrac{5\pi}{4}$	$\theta_3 = \dfrac{7\pi}{4}$
ρ_n	$\rho_0 = 8$	$\rho_1 = 4$	$\rho_2 = 2$	$\rho_3 = 1$

2. En utilisant les résultats du tableau précédent. placer les points M_0 M_1 M_2 et M_3 sur la copie et tracer la ligne brisée M_0 M_1 M_2 M_3.



Exercice 1 4

1. Déterminer le module et un argument de z_1, z_2, z_3, donner leur forme algébrique et placer les points $M_0\ M_1\ M_2\ M_3$.

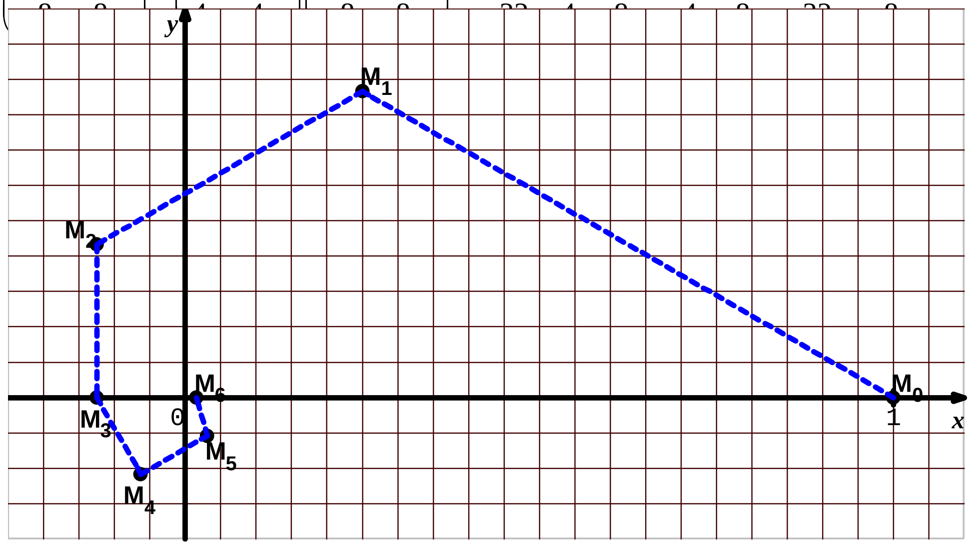
$|z_1| = \left|\frac{1}{2}e^{i\pi/3}z_0\right| = \frac{1}{2}\left|e^{i\pi/3}\right||z_0| = \frac{1}{2}$. $|z_2| = \left|\frac{1}{2}e^{i\pi/3}z_1\right| = \frac{1}{2}\left|e^{i\pi/3}\right||z_1| = \frac{1}{4}$. $|z_3| = \left|\frac{1}{2}e^{i\pi/3}z_2\right| = \frac{1}{2}\left|e^{i\pi/3}\right||z_2| = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i \ ;$$

$$z_2 = \frac{1}{2}e^{i\pi/3}z_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right) = \left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right) = \frac{1}{16}+2\times\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{4}i-\frac{3}{16} = -\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}i$$

$$z_3 = \frac{1}{2}e^{i\pi/3}z_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}i\right) = \left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\left(-\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}i\right) = -\frac{1}{32}+\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{8}i-\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{8}i-\frac{3}{32} = -\frac{1}{8}$$

.



2. Pour tout entier naturel *n*, on note ρ_n le module de z_n.

a. Déterminer la nature de la suite (ρ_n).

$|z_{n+1}| = \left|\frac{1}{2}e^{i\pi/3}z_n\right| = \frac{1}{2}\left|e^{i\pi/3}\right||z_n| = \frac{1}{2}|z_n|$;donc on a : $\rho_{n+1} = \frac{1}{2}\rho_n$ et la suite (ρ_n) est une suite géométrique

De premier terme $\rho_0 = 1$ et de raison $q = \frac{1}{2}$ et on a : $\rho_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rho_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b. Exprimer la somme $S_n = OM_0 + OM_1 + ... + OM_n$ en fonction de *n*.

$$S_n = OM_0 + OM_1 + ... + OM_n = \rho_0 \times \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = 2\times\left(1-(1/2)^{n+1}\right)$$

c. Quelle est la limite de S_n quand *n* tend vers $+\infty$?

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\times\left(1-(1/2)^{n+1}\right) = 2\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-(1/2)^{n+1}\right) = 2$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(1/2)^{n+1} = 0$

3. Prouver que pour tout entier *n*, $z_{n+1} - z_n = i\sqrt{3}z_{n+1}$. En déduire que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle.

$z_{n+1}-z_n=\frac{1}{2}e^{i\pi/3}z_n-z_n=\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-1\right)z_n=\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i-1\right)z_n=\left(-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n$.

$i\sqrt{3}\times z_{n+1}=\frac{1}{2}i\sqrt{3}\times e^{i\pi/3}z_n=\frac{1}{2}i\sqrt{3}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_n=\left(\frac{i\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}\right)z_n$; donc $z_{n+1}-z_n=i\sqrt{3}z_{n+1}$.

$$z_{n+1}-z_n=i\sqrt{3}z_{n+1}\Leftrightarrow\frac{z_{\overrightarrow{M_nMn+1}}}{z_{\overrightarrow{OMn+1}}}=i\sqrt{3}\Leftrightarrow\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{M_nMn+1}}}{z_{\overrightarrow{OMn+1}}}\right)=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\arg\left(z_{\overrightarrow{M_nMn+1}}\right)-\arg\left(z_{\overrightarrow{OMn+1}}\right)=\frac{\pi}{2}$$

Mais $\arg\left(z_{\overrightarrow{M_nM_{n+1}}}\right)=\left(\vec{u};\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right)$ et $\arg\left(z_{\overrightarrow{OM_{n+1}}}\right)=\left(\vec{u};\overrightarrow{OM_{n+1}}\right)$, donc

$$\arg\left(z_{\overrightarrow{M_nM_{n+1}}}\right)-\arg\left(z_{\overrightarrow{OM_{n+1}}}\right)=\left(\vec{u};\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right)-\left(\vec{u};\overrightarrow{OM_{n+1}}\right)=\left(\overrightarrow{OM_{n+1}};\vec{u}\right)+\left(\vec{u};\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right)=\left(\overrightarrow{OM_{n+1}};\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right)=\pi/2$$

le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle en M_{n+1}.

5. Exprimer la longueur de la ligne brisée $M_0\,M_1\,M_2\,M_3$ en fonction de S_3.

$$z_{n+1}-z_n=i\sqrt{3}z_{n+1}\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{M_nM_{n+1}}}=i\sqrt{3}z_{\overrightarrow{OMn+1}}\Leftrightarrow\left|z_{\overrightarrow{M_nM_{n+1}}}\right|=\left|i\sqrt{3}z_{\overrightarrow{OMn+1}}\right|=\sqrt{3}\left|z_{\overrightarrow{OMn+1}}\right|\Leftrightarrow M_nM_{n+1}=\sqrt{3}\times OM_{n+1}$$

$$l=M_0M_1+M_1M_2+M_2M_3=\sqrt{3}\times OM_1+\sqrt{3}\times OM_2+\sqrt{3}\times OM_3=\sqrt{3}\left(OM_1+OM_2+OM_3\right)=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right).$$

$l=\frac{7\sqrt{3}}{8}$.

$\sqrt{3}\left(S_3-OM_0\right)=\sqrt{3}\left(OM_1+OM_2+OM_3\right)=l$, donc $l=\sqrt{3}\left(S_3-1\right)=\sqrt{3}\left[2\left(1-(1/2)^4\right)-1\right]=\sqrt{3}\left[\frac{15}{8}-1\right]=\frac{7\sqrt{3}}{8}$