LYCEE CLASSIQUE D'ABIDJAN

Cherche, trouve et jamais n'abandonne

DEVOIR DE NIVEAU n°2 DE MATHEMATIQUES Tle C

Année scolaire : 2022- 2023

Date : Lundi, 19 Décembre 2022

Durée : 3 heures

EXERCICE 1 (2 points)

Ecris le numéro de chaque affirmation suivi de VRAI si l'affirmation est vraie et FAUX si elle est fausse.

1. La fonction de R vers R définie par $f(x) = xln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ est impaire.

2. Soit f la bijection de $]\frac{1}{2};+\infty[\ vers\ ]-\infty;\frac{3}{2}[$ définie par $f(x) = \frac{3x-4}{2x-1}$. Sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable en 1 et $(f^{-1})'(1)\ est\ égal\ à\ -5$

3. La parabole de foyer F(1 ; 3) et de directrice la droite (D) d'équation x = -2 a pour sommet le point S de coordonnées ($-\frac{1}{2}$; 3)

4. L'une des directrices de l'hyperbole (H) d'équation : $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16} = 1$ est la droite d'équation $y = \frac{4}{5}$

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chaque affirmation du tableau suivant, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Choisis la bonne réponse.

1. Dans l'espace muni du repère orthonormé (O, $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$), on considère le plan (P) d'équation $x + 2y + 2z - 3 = 0$ *et le point* $A(2;-1;-3)$. La distance de A à (P) est :

a) 2   b) 3   c) $\frac{1}{3}$

2. La courbe de la fonction g définie par $g(x) = x(lnx)^2$ a un point d'inflexion au point d'abscisse :

a) e^{-1} b) 1   c) e^{-2}

3. La fonction f de IR vers IR définie par $f(x) = ln|lnx|$ a pour ensemble de définition

a) $]0;1[\cup]1;+\infty[$ b) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ c) $]1;+\infty[$

4. Une primitive sur $[0;\frac{\pi}{4}]$ de la fonction f définie par $f(x) = tan^5x + tan^3x$ est donnée par :

a) F(x) = tan^4x b) $F(x) = \frac{1}{4}tan^4x$ c) $F(x) = -\frac{1}{4}tan^4x$

EXERCICE 3 (4 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) unité : 1cm.

On donne les points A(-1,0) et Ω(4 ; 0). On note (E) l'ellipse de centre Ω dont un sommet est A et un foyer est O.

1. a) Détermine les coordonnées des trois autres sommets de (E) dans le repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) .

b) Justifie que l'excentricité de (E) est égale à 0,8.

c) Donne une équation de la directrice (D) de l'ellipse (E) associé au foyer.

2.a) Démontre qu'une équation de (E) dans le repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) est : $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{y^2}{9} = 1$

b) Construis l'ellipse (E) dans le repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) .

EXERCICE 4 (7 points)

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur]0; $+\infty$[par $\begin{cases} f_n(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^n} ; si\ x > 0 \\ f_n(0) = 1 \end{cases}$

On note (C_n) sa courbe représentative dans le un repère orthonormé (O ; I ;J).

Soit la fonction g_n définie [0; $+\infty$[par $g_n(x) = \frac{x}{x+1} - nln(1+x)$

1- Démontre que g_n est strictement décroissante sur [0; $+\infty$[,

2. Calcule $g_n(0)$ *puis démontre que* $\forall x \in [0; +\infty[, g_n(x) \leq 0$.

3.a) Etudie la continuité de f_n en 0. (On distinguera les cas n = 1 et n > 1)

b) Etudie la dérivabilité de f_n en 0 puis interprète graphiquement le résultat

4. Calcule les limites de f_n en $+\infty$ puis interprète graphiquement le résultat.

5.a) Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[, f'_n(x) = \frac{g_n(x)}{x^{n+1}}$.

b) Etudie les variations de f_n puis dresse son tableau de variation.

6.a) Montre que $\forall x \in]0; +\infty[,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right) \times f_n(x)$

b) Déduis la position relative des courbes (C_{n+1}) et (C_n) puis établis que toutes les courbes (Cn) passent par deux points fixes que tu préciseras.

EXERCICE 5 (5 points)

Les élèves d'une classe de Terminale C du lycée classique d'Abidjan se rendent à L'ASECNA qui est une agence qui s'occupe entre autre de la sécurité aéroportuaire. Le responsable de la tour de contrôle affirme, ils ont la charge de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace (D_1) et (D_2) dont les représentations paramétriques dans l'espace rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, j ;$\vec{k}$)

(le plan (O ; $\vec{i}$;$\vec{j}$) représentant le sol) sont données respectivement par :

$(D_1): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ $\qquad$ $(D_2): \begin{cases} x = 2s \\ y = 1 - s \quad (s \in \mathbb{R}) \\ z = 3 + s \end{cases}$

Le responsable affirme que deux avions volant simultanément sur ces deux routes aériennes ne peuvent pas entrer en collision. De retour en classe ; les élèves se demandent si l'affirmation du responsable est vraie.

A l'aide d'une démonstration argumentée, répond à leur préoccupation.