DEVOIR SURVEILLE TLE C

Exercice 1

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} g(x) = \frac{1-e^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

1. Justifie que g est continue en 0

2. Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$

a) Calcule $h'(x)$ et $h''(x)$

b) Justifie que $\forall x \geq 0, 0 \leq h''(x) \leq x$

c) En déduis un encadrement de $h'(x)$ puis justifie que $\forall x \geq 0, 0 \leq h(x) \leq \frac{x^2}{6}$

d) Encadre alors pour $x > 0$ l'expression $\frac{1-e^{-x}-x}{x^2}$

3. Justifie que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = -\frac{1}{2}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} f(x) = (x^2 - 1) \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\} \\ f(-1) = f(1) = 0 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

1) Justifie que f est une fonction impaire. En donner une interprétation graphique.

2) a) Justifie que f est continue en 1

b) Etudie la dérivabilité de f en 1. Que peut-on en déduire.

3) Pour $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ Calcule $f'(x)$

Exercice 3

Toutes les questions sont indépendantes

1) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Démontre que f est impaire.

2) Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Déterminer la nature et les éléments remarquables de l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

a) $y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$

b) $x^2 + 2y^2 - 2x - 3 = 0$

3) Détermine les limites ci-dessus :

a/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - e^{2x})$

b/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3x+2}$

c/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^{2x} + 1} - e^x$

d/ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x}$

4) Démontre que pour $x > 0$; on a : $e^x > x > \ln x$