Lycée Classique Abidjan	DEVOIR SURVEILLE DE MATHEMATIQUES	2022—2023
	Tle C 2H	7/10/2022

EXERCICE I (2pts)

Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, une seule affirmation est vraie. Ecris le numéro de chaque ligne et la lettre de la colonne permettant d'avoir l'affirmation vraie

N°	Affirmations	A	B	C
1	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ est… car (C_f) admet une branche parabolique de direction (OI).	$+\infty$	0	$-\infty$
2	$x \neq 2$ et $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ est … car la fonction g est prolongeable par continuité en 2	$+\infty$	$-\infty$	10
3	f est continue et strictement décroissante sur]a ; b[et f(b) x f(a) < 0 le nombre d'antécédent de 0 dans]a ; b[est ..	Aucun	Un	Deux
4	La fonction f : $x \mapsto \sqrt[5]{x^{-2}}$ est définie sur …	IR_+^*	IR_+	IR^*

EXERCICE II (2pts)

Pour chacune des affirmations suivantes, écris le numéro de la ligne puis vrai si l'affirmation est vraie ou faux si l'affirmation est fausse. Exemple pour la ligne 5, la réponse est : 5-FAUX

1 – Il existe un point H du plan, barycentre des points pondérés (A, 2), (B, −1) et (C, −1)

2 – A, B et C les sommets d'un triangle,

a/ le barycentre G des points pondérés (A, 1), (B, 2) et (C, -1) est définie par $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

b/ Pour tout point M du plan on a : $MA^2 + 2MB^2 - MC^2 = 2GB^2 - GC^2 + GA^2 + 2MG^2$

3 – A et B deux distincts du plan, l'ensemble des points M du plan tel que : Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) = \pi$ est la droite (AB) privé du segment [AB]

EXERCICE III (6pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
Le tableau de variation ci-dessous est celui d'une fonction f définie et continue sur]0, +∞[

x	0	1	$+\infty$
f '(x)		+	
f(x)	$-\infty$	0	$+\infty$

On donne en plus les informations suivantes :
- Pour tous nombres réels strictement positifs x, y : f(xy) = f(x) + f(y) (1)
- La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (OI) en $+\infty$ (

1/ a/ Justifie que f est une bijection. On note f^{-1} sa bijection réciproque.
b/ Dresse le tableau de variation de f^{-1}

2/ On considère la fonction g définie sur]0 ; +∞[par $g(x) = f\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}$
Calcule les limites de g à droite en 0 et en + ∞, puis Interprète graphiquement les résultats .

3/ On admet que $\forall x \in]0, +\infty[$, $g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$

a/ Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
b/ Démontre que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution $\alpha \in]0 ; 1[$ et que $0,5 < \alpha < 0,6$

4/ Soit h la fonction définie sur [0, +∞[par : $\begin{cases} h(x) = xf\left(1+\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$. On note (C_h) la courbe d a/ A l'aide de la relation (1) démontre que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $h(x) = xf(x^2+1) + 2xf(\frac{1}{x})$

b/ Calcule les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0^>} xf\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(\frac{1}{x})$ (On pourra utiliser la relation (2)) et interprète graphiquement les résultats si possible.

c/ Démontre que $h(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$

5/ On admet que : $\forall x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq f(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

a/ En déduis un encadrement de $h(x)$ pour tout $x > 0$

b/ En déduis la limite de $h(x)$ en $+\infty$, puis interprète graphiquement le résultat.

EXERCICE IV (6pts)

Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère les points A, B et C, trois distincts tel que : $AB = AC = 4d$ et $BC = 2d$, où d est un réel strictement positif donné. Les points A, B et C sont affectés respectivement des coefficients λ, 1 et 1 où $\lambda \in IR \setminus \{-2\}$.

1/ Détermine l'ensemble Δ des barycentres G_λ de ces points lorsque λ décrit $IR \setminus \{-2\}$.

2/ Dans le cas où $\lambda = -1$

on appelle G le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients -1, 1 et 1.

a/ Détermine G

b/ Détermine l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant l'égalité $MB^2 + MC^2 = MA^2$

3/a/ Démontre que pour tout point M du plan $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MA}$ est un vecteur constant que l'on déterminera.

b/ Détermine l'ensemble Δ' des points M du plan tels que : $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 32d^2$

4/ Dans le cas où $\lambda = 1 - \alpha$ et $d = 1$

on appelle H_α le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients $1-\alpha$, α et α avec $\alpha \in]0 ; \frac{1}{2}]$

a/ Détermine l'ensemble des points H_α lorsque α décrit l'intervalle $]0 ; \frac{1}{2}]$

b/ Détermine selon les valeurs de α l'ensemble des points M du plan tels que :

$(1-2\alpha)MA^2 + \alpha MB^2 + \alpha MC^2 = 25$

EXERCICE V (4pts)

Lors d'un cours de SVT en terminale scientifique, le professeur informe toute la classe qu'une étude sur l'évolution dans le temps de la population P d'une espèce d'oiseau qui vie dans la forêt du Congo, a montré que celle-ci a considérablement diminué. Elle était estimée à 27000 individus en l'an 2001, sachant que l'évolution de la population est définie par la formule $P(t) = 10^3 \times \frac{t+\ldots}{t^2+3}$ où t désigne le nombre d'année qui s'écoule depuis cette année-là.

Le professeur préoccupé par cette population d'oiseau, voudrait déterminer le nombre d'oiseau en l'an 2022 et après une très longue période car il souhaiterait créer une fondation pour la protection de cette espèce d'oiseau. En utilisant vos connaissances mathématiques répondez aux préoccupations du professeur.