DEVOIR DE NIVEAU

JEUDI 31 MARS 2022

Durée : 4 heures

Terminale : C

MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1

Pour chacune des affirmations du tableau ci-dessous réponds par VRAI ou FAUX.
Tu écriras sur ta feuille de copie le numéro de l'affirmation suivi de VRAI si l'affirmation est vraie ou de FAUX si l'affirmation est fausse.

N°	AFFIRMATIONS	REPONSES
1	L'écriture $-2e^{\frac{\pi}{7}i}$ est une écriture exponentielle d'un nombre complexe	
2	Une suite numérique décroissante et non majorée diverge vers $+\infty$.	
3	L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $ARG(z - z_A) = \frac{\pi}{6}$ est la ~~droite~~ de demi-droite de repère $(A, \vec{u})$ privé du point A où $(\widehat{\vec{e_1}, \vec{u}}) = \frac{\pi}{6}$.	
4	La suite numérique de terme générale $\left(\frac{e}{\pi}\right)^n$ diverge vers $+\infty$.	

EXERCICE 2

Pour chacune des affirmations incomplètes du tableau ci-dessous, trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule permet d'avoir l'affirmation exacte.
Ecris sur ta feuille de copie le numéro de l'affirmation incomplète suivi de la lettre Correspondant à la bonne réponse.

N°	AFFIRMATIONS	REPONSES A	REPONSES B	REPONSES C
1	Les racines carrées de $5 - 12i$ sont….	$3 + 2i$ et $3 - 2i$	$-3 + 2i$ et $3 - 2i$	$3 + 2i$ et $-3 - 2i$
2	pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in IR$, on a : $coskx$ est égal à…	$\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$	$\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$	$\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2}$
3	La suite (U_n) définie par : $\forall n \geq 1, U_n = \frac{n!}{n^6}$ est….	croissante	décroissante	n'est pas monotone

4	La suite V définie par : $V_n = \frac{2-\sin n}{n}$	est convergente vers 0	n'admet pas de limite	diverge vers $+\infty$

EXERCICE 3

On considère la suite U défiie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 5 - \frac{12}{u_n + 3} \end{cases}$

1. a) Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq U_n \leq 3$.
   b) Démontre par récurrerfce que la suite U est croissante.
   c) Déduis-en que la suite U est convergente.
2. Soit V la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{-2U_n + 6}{3U_n + 3}$
   a) Démontre que la suite V est une suite géométrique dont on précisera la raison et son premier terme.
   b) Exprime V_n puis U_n en fonction de n.
   c) Déduis-en la limite de la suite U.

EXERCICE 4

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (unité graphique 2 cm).

1. Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z) = z^3 - 2z^2 + 3z + 6$.
   a) Calcule $P(-1)$.
   b) Détermine les nombres complexes a et b tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$,
   $P(z) = (z + 1)(z^2 + az + b)$.
   c) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation : $P(z) = 0$.
2. On désigne par A, B,et C les points du plan d'affixe respectives : $z_A = -1$, $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 2 - i\sqrt{3}$.
   a) Place les points A, B et C.
   b) Démontre que le triangle ABC est équilatéral.
   c) Détermine et construis l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z vérifiant :
   $|(1 + i\sqrt{3})z - 1 + 3\sqrt{3}i| = 4$.

EXERCICE 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique 2 cm).
On note f_n la fonction de la variable réelle définie sur $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$ par :

$$f_n = \frac{e^{x+1}}{(x+2)^n} \quad \text{où } n \text{ est un entier naturel non nul.}$$

(C_n) désigne la courbe représentative de f_n dans le repère.

1. a) Calcule la limite de f_n en $-\infty$.
   Donne une interprétation graphique du résultat obtenu.
   b) Calcule la limite de f_n en $+\infty$ (on posera $X = x + 1$).
2. Etudie suivant la parité de n, la limite de f_n en -2.
   Donne une interprétation graphique du résultat obtenu.
3. a) Démontre que pour tout réel x de $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$, $f'_n(x) = \frac{(x+2-n)e^{x+1}}{(x+2)^{n+1}}$
   b) Etudie le signe de $f'_n(x)$ selon la parité de n.
   c) Dresse le tableau de variation de f_n.
4. Démontre que toutes les courbes (C_n) passent par le point $A(-1; 1)$.
   Détermine une équation de la tangente (T_n) au point A.
5. a) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ puis interprète graphiquement le résultat obtenu.
   b) Démontre que pour tout entier naturel n, non nul, et pour tout réel x différent de -2,
   on a : $f'_n(x) = f_n(x) - nf_{n+1}(x)$.
   c) Déduis-en les positions relatives des courbes (C_n) et (T_n).
   Représente graphiquement (C_n) et (T_n).

EXERCICE 6

Mémé est une femme très généreuse, et à la fin de chaque mois elle dispose d'une somme d'argent (toujours identique) et elle aime faire des cadeaux.
Quand tous ses petits-enfants viennent, elle leur donne à chacun la somme de 17 000 francs et il lui reste 4 000 francs. Quand tous ses arrière-petits-enfants viennent, elle leur donne à chacun 11 000 francs et il lui reste 9 000 francs.

Sachant que qu'à la fin du mois, Mémé dispose de moins de 200 000 francs ; Hermine une amie de l'un des arrière-petits-enfants veut savoir la somme que dispose Mémé.
Cette dernière ignore le nombre de petits-enfants et d'arrière-petits-enfants qu'à Mémé.
Elle te sollicite.

A l'aide d'une production argumentée, détermine la somme que dispose Mémé à la fin du mois.