

DEVOIR DE MATHEMATIQUES

Terminale C1 , durée : 02 heures

EXERCICE 1

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$U_0 = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx \quad \text{et pour } n \geq 1, U_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2} dx .$$

1. Soit f la fonction numérique définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

Calculer la dérivée de f et en déduire U_0 puis calculer U_1 .

2.

a) Démontrer que la suite (U_n) est décroissante. En déduire sa convergence.

b) Démontrer que $\forall x \in [0;1], 1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$

c) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1, \frac{1}{n+1} \leq U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ (1)

d) Déterminer la limite de (U_n)

3. Pour tout $n \geq 3$, on pose $I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{(1+x^2)^3} dx$

a) Vérifier que pour tout $n \geq 3, U_n + U_{n-2} = I_n$.

b) Par une intégration par parties portant sur I_n , démontrer que pour tout $n \geq 3$ on a $I_n = \frac{2\sqrt{2}}{n-1} - \frac{3}{n-1} U_n$.

En déduire que pour tout $n \geq 3, (n+2)U_n + (n-1)U_{n-2} = 2\sqrt{2}$.

EXERCICE 2

Dans un quartier d'affaires, les automobilistes qui désirent se garer doivent utiliser des parkings payants. Le stationnement est interdit en tout endroit.

La probabilité pour un automobiliste d'être interpellé par la police municipale pour stationnement interdit et d'avoir alors à payer une amende est constante et égale à 0,2.

Monsieur Wariko, homme d'affaires ayant constaté que les stationnements payants lui reviennent trop cher, prend le risque de se garer en stationnement interdit.

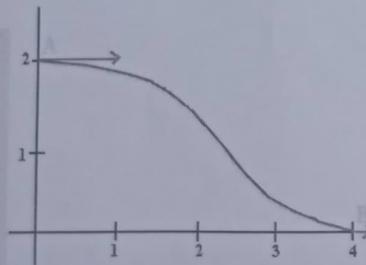
Il se gare ainsi 20 fois par mois. (Les résultats sont arrondis à l'arrondi d'ordre 2).

- 1) Démontrer que l'arrondi d'ordre 2 de la probabilité pour que Monsieur Wariko ne paye aucune amende dans le mois est égale à 0,01.
- 2) Calculer la probabilité pour que Monsieur Wariko paye exactement deux amendes dans le mois.
- 3) Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre d'amendes que Monsieur Wariko doit payer chaque mois.
 - a) Calculer l'espérance mathématique de X .
 - b) En déduire que Monsieur Wariko paye en moyenne 4 amendes par mois.
- 4) La mairie de la ville s'est rendue compte que le nombre de personnes se garant en stationnement interdit s'est accru, encombrant ainsi les voies, elle a donc décidé d'augmenter le montant de l'amende de façon à décourager ceux qui se garent en stationnement interdit.

Un automobiliste qui se gare 20 fois par mois dans les parkings payants, paye en moyenne 30 000F par mois. A partir de quel montant d'amende, Monsieur Wariko a-t-il intérêt à utiliser les parkings payants ?

EXERCICE 3

Le gérant d'un centre de loisir décide de faire installer une rampe de skate. La figure de gauche ci-dessous donne un aperçu du plan de cette rampe. La figure de droite donne une représentation dans un repère orthonormé d'unité 1 mètre du profil de la rampe par la courbe représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par $f(x) = 10xe^{-x}$.



Le mur de soutènement de la rampe sera peint sur une seule face. Pour cela, le gérant fait appel à un artiste peintre. Sur son devis, il demande un forfait de 25 000 Fcfa auquel s'ajouteront 1 000 Fcfa par mètre carré peint.

A l'aide d'une proposition argumentée basée sur tes connaissances mathématiques au programme, détermine le montant du devis du peintre. (On donnera l'arrondi d'ordre 0 du résultat)