Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

LYCEE SCIENTIFIQUE
YAMOUSSOUKRO

ANNEE SCOLAIRE : 2020-2021

DEVOIR DE MATHEMATIQUES

Terminale C , durée : 04 heures

EXERCICE 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Pour chaque question, une seule des quatre réponses est exacte. L'élève indiquera sur sa copie, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte 0,5 point. Chaque réponse fausse enlève 0,25 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

	A	B	C	D
1. L'écriture complexe de la rotation de centre D (i) et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ est	$z'=(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})z$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$	$z'=(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})z$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$	$z'=(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})z$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$	$z'=(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})z$ $+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$
2. L'image E du point D$(-i)$ par la rotation de centre A(1) et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i)$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1-i)$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}(1-i)$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i)$
3. (Z_n) est une suite de nombres complexes telle que $Z_0=1+i$ et $Z_{n+1}=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)Z_n$ et M_n le point d'affixe Z_n	Pour tout entier n , M_n appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$	Pour tout entier n ,le triangle OM_nM_{n+1} est équilatéral	La suite de terme général $U_n=\lvert Z_n\rvert$ est convergente	Pour tout entier naturel n, un argument de $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_n}$ est $\frac{\pi}{2}$
4. Soit l'application f du plan dans le plan d'écriture complexe $z'=-iz-2i$	f est une homothétie	f est la rotation de centre le point d'affixe $1+i$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$	f est la rotation de centre le point d'affixe $-1-i$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.	Le point d'affixe $-1-2i$ est antécédent du point d'affixe i

EXERCICE 2

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses?

L'élève indiquera sur sa copie le numéro de l'assertion et la lettre V(pour vrai) ou la lettre F(pour Faux)

Exemple : 1.V ou 1.F

Chaque réponse exacte rapporte 0,5 point. Chaque réponse fausse enlève 0,25 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

1. (U_n) est une suite croissante et majorée par 2, alors elle converge vers 2

2. La suite $(a^n)_{n\in IN^*}$ est convergente pour $-1\prec a\leq 1$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

3. Si $(U_n)_{n\in IN}$ est une suite numérique telle que pour tout n entier naturel, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$ alors elle est décroissante

4. La suite $(V_n)_{n\in IN^*}$ définie par $V_n = \frac{3^n}{n!}$ est décroissante à partir du rang 2

EXERCICE 3

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère dans $\square$, l'équation (E) : $z^3+(4-2i)z^2+(8-6i)z+8-4i = 0$

1. Démontre que (E) admet une unique solution réelle à déterminer et résous (E).

2. On considère dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives $-1+3i$, -2 et $-1-i$ et r, la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω d'affixe i.

a) Place dans le plan, les points A, B et C

b) Détermine l'image du point A par r.

c) Détermine l'antécédent D du point C par r. Place D sur la figure

3. Démontre que les quatre points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 4

On considère les fonctions f et g définies sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$ par $g(x)=(x-1)e^x+x^2$ et $f(x)=\frac{e^x}{x+e^x}$

1. Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

2. Justifie que les équations $f(x)=x$ et $g(x)=0$ sont équivalentes sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$

3. Démontre que pour tout $x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$, $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$

4. Démontre que pour tout $x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$, $f(x)\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

5. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in IN^*}$ définie par $u_1=\frac{1}{2}$ et $u_n=f(u_{n-1})$ pour tout entier naturel $n\geq 2$.

a) Démontre par récurrence que pour tout $n\in IN^*$, $u_n\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

b) Démontre que pour tout $n\in IN^*$, $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

c) Démontre par récurrence que pour tout $n\in IN^*$, $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$

d) Etudie la convergence de la suite $(u_n)_{n\in IN^*}$

e) Détermine le plus petit entier naturel p tel que pour tout $n\geq p$, u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-7} près.

EXERCICE 5

Pour tout n entier naturel, on pose $I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx$

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

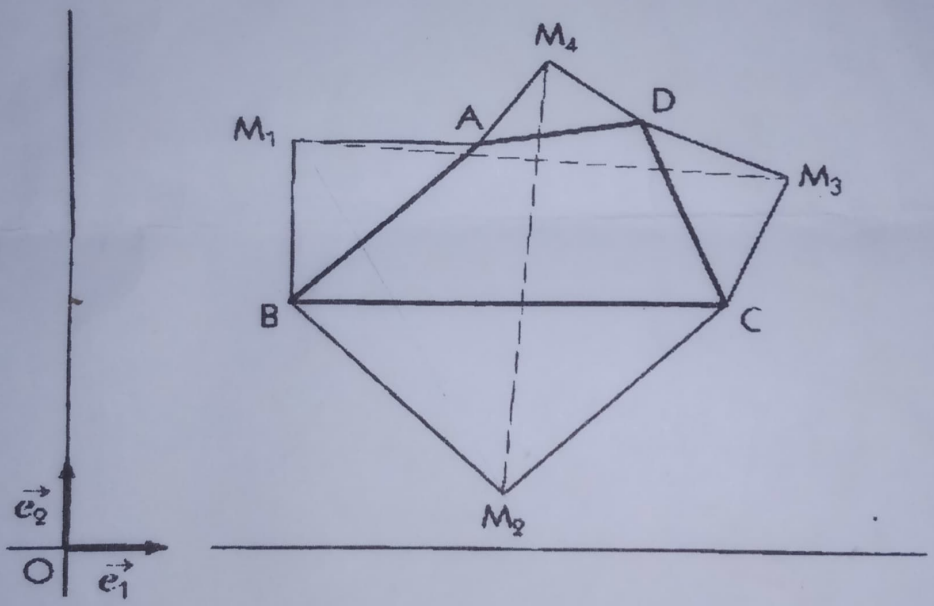
1. Calculer I_0 et montre que $I_1 = -\frac{1}{2} + \ln 2$.

2. Montre que pour tout entier naturel n, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+2}$

3. Pour $x \neq -1$ et n entier naturel non nul, montre que $1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n - \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^{n+2} x^{n+1}}{1+x}$.

4. On pose $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Déduis de la question précédente que $I_n = (-1)^n (S_n - \ln 2)$

EXERCICE 6

Des élèves d'un lycée ont décoré par différentes figures géométriques les murs de la salle du club mathématiques. La figure ci-dessous représentant l'une d'elles est constituée d'un quadrilatère ABCD de sens direct et de triangles rectangles isocèles AM_1B, BM_2C, CM_3D et DM_4A de sommets respectifs M_1, M_2, M_3 et M_4. Observant attentivement cette figure, l'un des élèves de la promotion terminale passionné de nombres complexes et géométrie, affirme que les droites (M_1M_3) et (M_2M_4) sont perpendiculaires et $M_1M_3 = M_2M_4$.

Démontre en utilisant les nombres complexes que l'affirmation de cet élève est correcte.