LYCEE SCIENTIFIQUE
YAMOUSSOUKRO

ANNEE SCOLAIRE : 2019-2020
CLASSES : T^{le} C_4 et C_5
DUREE : 3^H

DEVOIR DE MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

On considère les fonctions $F : x \mapsto \int_1^x \frac{\ln t}{t}\,dt$ et $G : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}}\,dt$

1/ a) Détermine l'ensemble de définition de F.

b) Etudie le sens de variation de F puis dresse son tableau de variation.

c) Déduis-en le signe de F.

2/ a) Détermine l'ensemble de définition de G.

b) Utilise les propriétés de comparaison des intégrales pour étudier le signe de G.

c) Etudie le sens de variation de G et retrouve le signe de G.

EXERCICE 2

1/ Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$

a) A l'aide d'une intégration par parties, démontre que $I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$ et que $I_n = I_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+3}$

b) Calcule I_0 puis démontre que $I_n = \frac{2^{2n+2}\, n!\,(n+1)!}{(2n+3)!}$

2/ On considère les suites $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ et $T_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$

a) A l'aide d'une intégration par parties, démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on a : $J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$

b) Calcule J_0 et J_1 puis démontre que :

* pour n pair $(n = 2p)$, on a : $J_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$
* pour n impair $(n = 2p+1)$, on a : $J_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$

c) En effectuant dans T_n le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$, démontre que $T_n = J_n$.

FIN

" L'excellence, notre passion "