Gravitation - satellite terrestre

d'après concours GEIPI 2000

La force de gravitation s'exerçant entre la terre et le soleil vaut $F=3{,}5\ 10^{22}$ N. Connaissant la constante de gravitation $G=6{,}67\ 10^{-11}$ SI, la masse de la terre $Mt = 6\ 10^{24}$ kg et la distance terre soleil $d=1{,}5\ 10^{8}$ km, exprimer en fonction des données la masse Ms du soleil puis calculer sa valeur numérique.

Un satellite assimilé à un point matériel de masse m décrit d'un mouvement uniforme dans le champ de gravitation de la terre une orbite circulaire à l'altitude h= 400 km. L 'orbite est située dans le plan équatorial de la terre et le rayon terestre a pour valeur R=6400 km.

- Déterminer dans le repère géocentrique la vitesse V du satellite en fonction de G, Mt et r (r étant le rayon de la trajectoire). Calculer la valeur numérique de V.

-Déterminer dans le même repère, les expressions littérales et les valeurs numériques de la période T et de la vitesse angulaire ω du satellite.

Le mouvement de ce satellite obéit à la troisième loi de Képler qui a pour expression (choisir l'expression correcte)

$\frac{r^3}{T^2}=\frac{GMt}{4\pi^2}$ (1) $\quad \frac{r^3}{T^2}=\frac{4\pi^2}{GMt}$ (2) $\quad \frac{r^2}{T^3}=\frac{GMt}{4\pi^2}$ (3) $\quad \frac{r^2}{T^3}=\frac{4\pi^2}{GMt}$ (4)

Déterminer en fonction de Mt, G, R et T=86400s (période de révolution de la terre sur son axe), l'altitude h_0 à laquelle un satellite en orbite circulaire équatoriale autour de la terre doit évoluer pour qu'il soit géostationnaire. Calculer la valeur numérique de h_0.

---

corrigé

---

force de gravitation proportionnelle aux masses et inversement proportionnelle au carré de la distance

$F = G\ Mt\ Ms / d^2$ masse en kg et distance en m.

$d = 1{,}5\ 10^{11}$ m

$Ms = F\ d^2 / (G\ Mt) = 3{,}5\ 10^{22} * 10{,}5^2\ 10^{22} / (6{,}67\ 10^{-11}*6\ 10^{24}) =$ 1,96 10^{30} kg.

Le satellite est soumis uniquement à la force de gravitation centripète $F=G\ Mt\ m / r^2$

le mouvement est circulaire uniforme.

l'accélération normale est égale à : $a_N= V^2 / r$

la relation fondamentale de la dynamique (2ème loi de Newton) projetée sur l'axe n de la base de frenet donne :

$V^2 / r = G\ Mt / r^2$

d'où $V^2 = G\ Mt / r$ *avec* r = $(6400+400)\ 10^3$ = 6,8 10^6 mètres

$V^2 = 6{,}67\ 10^{-11} * 6\ 10^{24} / 6{,}8\ 10^6 = 5{,}88\ 10^7$.

V=7668 m/s.

---

la période est la durée nécessaire pour parcourir une circonférence à la vitesse V

$2\pi r = V\ T$

$4\pi^2 r^2 = V^2\ T^2$

remplacer V^2 par l'expression ci dessus.

$4\pi^2 r^2 = G\ Mt\ T^2 / r$

soit $T^2 = 4\ \pi^2\ r^3 / (G\ Mt)$ (3ème loi de Kepler)

l'expression (1) est correcte.

$T^2 = 4*3{,}14^2 * (6{,}8\ 10^6)^3 / (6{,}67\ 10^{-11}*6\ 10^{24})$ d'où T= 5558 s.

la vitesse angulaire est égale à : $\omega = 2\pi / T = 6{,}28 / 5558 = 1{,}13\ 10^{-3}$ rad/s.

$r^3 = T^2\ G\ M_t / (4\ \pi^2)$ d'après la 3ème loi de Képler.
avec $r = R + h_0$.
$r^3 = (8{,}64\ 10^4)^2 * 6{,}67\ 10^{-11} * 6 10^{24} / (4 * 3{,}14^2) = 75{,}75\ 10^{21}\ m^3$.
$r = 4{,}237\ 10^7$ m = 42370 km
h_0= 42300-6400= 35970 km.