Satellite-chute-mouvement parabolique

satellite sur une orbite circulaire :

La Terre est assimilée à une sphère homogène de masse M , de centre T et de rayon R = 6380 km . On admettra que la force de gravitation ,qu'elle exerce sur les objets situés à une distance r > R de son centre T ,est la meme que si toute la masse M_T était concentrée en T .On notera G la constante de gravitation et on prendra : G = 6,67 10^{-11} N.m^2.kg^{-2} . Un satellite artificiel de la Terre, de masse m ,est en orbite circulaire à l'altitude h = 300 km au dessus de la Terre .

Montrer que le mouvement du satellite est uniforme. Déterminer l'expression de sa vitesse en fonction de r =R + h , G et M.

On sait que v = 7740 m.s^{-1} .Calculer la masse de la Terre .

descente du satellite :

Pendant cette phase, le champ de pesanteur (vecteur de) g est supposé uniforme (g = 10 m.s^{-2}) . L'axe des z est choisi parallèle à g et de sens opposé.Le sol terrestre supposé horizontal est pris comme plan xOy des coordonnées . On suppose que le satellite, freiné par un parachute, descend d'un mouvement vertical rectiligne uniforme , de vitesse v_1 = 10 m.s^{-1} . Le satellite étant arrivé au point M_0 de coordonnées (x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 3,0 km), à un instant pris comme origine des temps, une balise radio est éjectée horizontalement du satellite dans le plan xOz avec le vecteur vitesse v_2 (v_2 = 2 m.s^{-1}) par rapport au satellite : cela signifie qu'au point M_0 ,

la balise radio a par rapport à la Terre, le vecteur vitesse initiale $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Le mouvement du satellite est supposé non modifié par l'éjection de la balise . Celle-ci tombe dans le champ de pesanteur terrestre, les frottements de l'air étant supposés négligeables .

On appelle z_s l'altitude instantanée du satellite , x_B, y_B et z_B les coordonnées instantanées de la balise. Déterminer les équations horaires $z_s(t)$, $x_B(t)$, $y_B(t)$ et $z_B(t)$

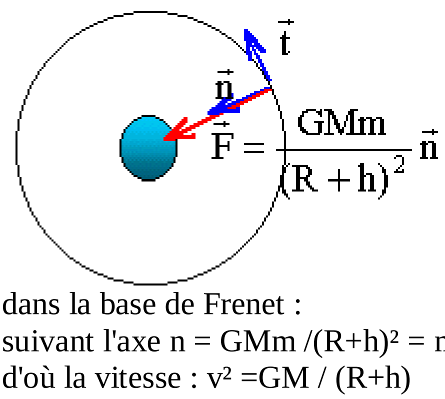
Lequel des deux objets, le satellite ou la balise, touchera le sol en premier ? Quel est l'intervalle de temps qui sépare les deux arrivées

---

corrigé

le satellite est soumis à la seule force de gravitation centripète

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{(R+h)}\vec{n} = \frac{GM}{(R+h)^2}\vec{n}$$



dans la base de Frenet :

suivant l'axe n = GMm /(R+h)² = mv²/ (R+h)

d'où la vitesse : v² =GM / (R+h)

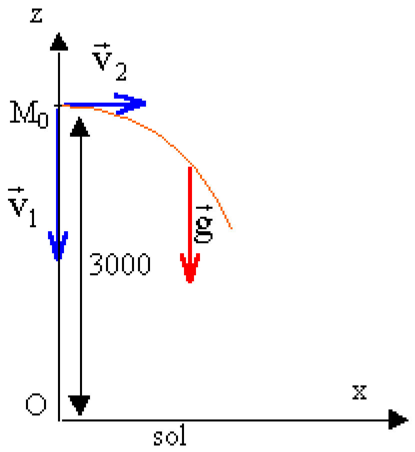
suivant l'axe t : dv/dt = 0 doù norme de la vitesse constante et mouvement uniforme.

masse de la terre :

mettre les distances en mètres R+h = (6380+300)10^3 = 6,68 10^6 m

v² = 7,74 ² 10^6 = 6 10^7 m²/s²

$M = v^2(R+h) / G = 6\ 10^7 * 6{,}68\ 10^6 / 6{,}67\ 10^{-11} = 6\ 10^{24}$ kg.



le mouvement du satellite est uniforme suivant Oz : $z_s = -10\ t + 3000$.
durée de la chute : t= 3000/ 10 = 300 s.
le mouvement de la balise est dans le plan contenant l'accélération g et le vecteur vitesse initiale.
composantes du vecteur accélération : (0 ; -10)
composantes du vecteur vitesse initiale : (2 ; -10)
composantes du vecteur position initial : (0 ; 3000)
le vecteur vitesse est une primitive du vecteur accélération : (2 ; -10t -10)
le vecteur position est une primitive du vecteur vitesse :
$x = 2\ t$ et $z = -5\ t^2 - 10t + 3000$
équation de la trajectoire parabolique :
t= 0,5 x et repport dans z
$z = -5\ x^2 / 4 - 10\ x/2 + 3000$
$z = -1{,}25\ x^2 - 5x + 3000$.
durée de la chute :
au sol z=0 soit $-5t^2 - 10t + 3000 = 0$
$t^2 + 2t - 600 = 0$
résoudre et conserver la racine positive
$\Delta = 4 + 600*4 = 2404$
prendre la racine carrée de 2404 donne 49
t= (-2+49) / 2 = 23,5 s.
la balise touche le sol en premier, 300-23,5 = 264,5 s avant le satellite.