


PROPOSITION DE CORRIGÉ
Épreuve de mathématique baccalauréat série C Cameroun
Session Mai 2023
PAR GILDAS MBA OBIANG
PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES : 13,25 points
Exercice 1. 4,5 points

1. f est dérivable sur D comme composée et somme de fonctions dérivables sur D et pour tout x de D on a :

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = 1 + \frac{1}{2(x-1)} > 0$$

par suite, f est strictement croissante sur D . De plus, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc on peut en déduire le tableau des variations suivant :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

Tableau de variation de f .

2. D'après la question 1, on en déduit que f réalise une bijection de D vers $\mathbb{R}$. Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet pour unique solution $x = 2$ car $f(2) = 2 - 2 + \ln\sqrt{2-1} = 0$.

3. Pour tout x de D on a :

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \quad \text{et} \quad f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

4. h est dérivable sur D comme quotient de fonctions dérivables sur D et pour tout x de D on a :

$$h'(x) = \frac{\left(2 - \frac{1}{x-1}\right)\sqrt{x-1} - \frac{(2x-2-\ln(x-1))}{2\sqrt{x-1}}}{2(x-1)}$$

$$h'(x) = \frac{2(2x-3) - (2x-2-2\ln(\sqrt{x-1}))}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$$h'(x) = \frac{x-2+\ln(\sqrt{x-1})}{2(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{f(x)}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$$

Il s'ensuit que pour tout x de D ,

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

donc h est strictement décroissante sur $]1; 2]$ et strictement croissante sur $[2; +\infty[$.

5. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \sum_{j=0}^n \frac{1}{n} h\left(2 + \frac{j}{n}\right)$ et on pose $I = \int_2^3 h(x) dx$.

a) Calculons $\int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}} dx$

Posons .

$$\begin{aligned} u': x &\mapsto \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & ; & & v': x &\mapsto \frac{1}{x-1} \\ u: x &\mapsto \sqrt{x-1} & ; & & v: x &\mapsto \ln(x-1) \end{aligned}$$

On a .

$$\int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}} dx = [\ln(x-1)\sqrt{x-1}]_2^3 - \int_2^3 \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} dx$$

$$\int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}} dx = \sqrt{2}\ln 2 - 2 \int_2^3 \frac{1}{2\sqrt{x-1}} dx$$

$$\int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}} dx = \sqrt{2}\ln 2 - 2[\sqrt{x-1}]_2^3$$

$$\int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}} dx = \sqrt{2}\ln 2 - 2\sqrt{2} + 2$$

Déduisons la valeur de I .

On a .

$$I = \int_2^3 \frac{2x-2}{2\sqrt{x-1}} dx + \int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}} dx$$

$$I = \int_2^3 \sqrt{x-1} dx + \int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}} dx$$

$$I = \frac{2}{3} \left[(x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_2^3 + \sqrt{2}\ln 2 - 2\sqrt{2} + 2$$

$$I = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{2} - \frac{2}{3} + \sqrt{2}\ln 2 - 2\sqrt{2} + 2$$

$$I = \sqrt{2}\ln 2 + \frac{4-2\sqrt{2}}{3}$$

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et j un entier naturel tel que $0 \leq j \leq n-1$.

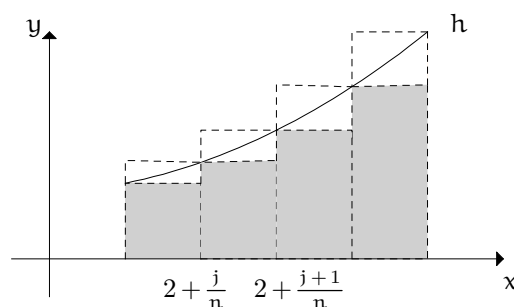


Figure.

Pour tout x de l'intervalle $\left[2 + \frac{j}{n}; 2 + \frac{j+1}{n}\right]$ on a .

$$h\left(2 + \frac{j}{n}\right) \leq h(x) \leq h\left(2 + \frac{j+1}{n}\right)$$

par suite,

$$h\left(2 + \frac{j}{n}\right) \int_{2+\frac{j}{n}}^{2+\frac{j+1}{n}} dx \leq \int_{2+\frac{j}{n}}^{2+\frac{j+1}{n}} h(x) dx \leq h\left(2 + \frac{j+1}{n}\right) \int_{2+\frac{j}{n}}^{2+\frac{j+1}{n}} dx$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{n} h\left(2 + \frac{j}{n}\right) \leq \int_{2+\frac{j}{n}}^{2+\frac{j+1}{n}} h(x) dx \leq \frac{1}{n} h\left(2 + \frac{j+1}{n}\right)$$

c) De la question précédente, on en déduit successivement les inégalités .

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n} h\left(2 + \frac{j}{n}\right) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{2+\frac{j}{n}}^{2+\frac{j+1}{n}} h(x) dx \leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n} h\left(2 + \frac{j+1}{n}\right)$$

par suite,

$$u_n - \frac{1}{n} h(3) \leq \int_2^3 h(x) dx \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} h\left(2 + \frac{j}{n}\right)$$

ce qui entraîne que pour tout entier naturel non nul n .

$$u_n - \frac{1}{n} h(3) \leq I \leq u_n - \frac{1}{n} h(2)$$

d) D'après l'inégalité précédente, on en déduit pour tout entier naturel non nul n .

$$-\frac{1}{n} h(3) \leq I - u_n \leq -\frac{1}{n} h(2)$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{n} h(3)\right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{n} h(2)\right] = 0$ alors par le théorème des gendarmes, on en déduit que la suite $(u_n)_n$ converge vers I c'est-à-dire que .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n h\left(2 + \frac{j}{n}\right) = \int_2^3 h(x) dx$$

Exercice 2. 4,25 points

1. Pour simplifier les calculs on pose .

$$F(z) = z^2 + (-3\cos\alpha - 1 + i(3 - 5\sin\alpha))z + 5\sin\alpha - 2 + i(-3\cos\alpha - 1)$$

On a .



$$F(-i) = -1 + 3i\cos\alpha + i + 3 - 5\sin\alpha + 5\sin\alpha - 2 - 3i\cos\alpha - i$$

$$F(-i) = -1 + 3 - 2 + i - i$$

$$F(-i) = 0$$

donc $-i$ est une solution de (E).

2. Soit z la deuxième solution de (E). Alors on a .

$$-iz = 5\sin\alpha - 2 + i(-3\cos\alpha - 1)$$

d'où $z = 3\cos\alpha + 1 + i(5\sin\alpha - 2)$.

3. Considérons la famille des points A_α d'affixes $z_\alpha = 3\cos\alpha + 1 + i(5\sin\alpha - 2)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

En posant $x = 3\cos\alpha + 1$ et $y = 5\sin\alpha - 2$ on a .

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

c'est-à-dire que $25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0$ donc chaque point A_α appartient à la conique $(\mathcal{E})$.

Réciproquement, soit $M(x; y)$ un point de la conique $(\mathcal{E})$. On a .

$$\frac{x-1}{3} \in [-1; 1] \text{ et } \frac{y+2}{5} \in [-1; 1]$$

donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{x-1}{3} = \cos\alpha$ et $\frac{y+2}{5} = \sin\alpha$ ce qui revient à $x = 3\cos\alpha + 1$ et $y = 5\sin\alpha - 2$. Ainsi, M a pour affixe $z = 3\cos\alpha + 1 + i(5\sin\alpha - 2)$ c'est-à-dire M est un élément de la famille A_α . De ce fait, on en déduit que la famille des points A_α lorsque α décrit $\mathbb{R}$ est la conique $(\mathcal{E})$.

4. Soit $\Omega(1; -2)$ un point de plan.

a) Soit M un point du plan de coordonnées $(x; y)$. On a .

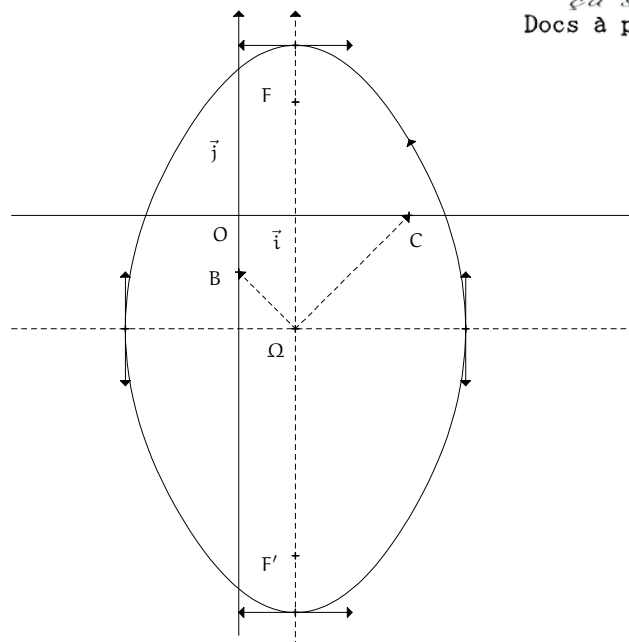
$$M \in (\mathcal{E}) \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

ainsi, dans le repère $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$ la conique $(\mathcal{E})$ a pour équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

b) Dans le repère $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$, $(\mathcal{E})$ a une équation du type $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = 3$ et $b = 5$ donc on en déduit la valeur du paramètre $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$. Ainsi, la conique $(\mathcal{E})$ est l'ellipse de centre Ω , de foyer $F\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ et $F'\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$, d'axe focal (Oy) , d'excentricité $\frac{4}{5}$ et de sommets de coordonnées $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$; $\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -5 \end{smallmatrix}\right)$.

c) Construction de $(\mathcal{E})$ dans le repère $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$.

Fomesoutra.com
ça s'écrit !
 Docs à portée de main



Construction de $(\mathcal{E})$ dans le repère $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$.

5. Soient B et C deux points d'affixes respectives i et 3 .

a) Soit S la similitude directe de Ω qui transforme C en B .

S a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ avec $\begin{cases} -i &= 3a + b \\ 1 - 2i &= a(1 - 2i) + b \end{cases}$
c'est-à-dire

$$a = \frac{1}{2}i \quad \text{et} \quad b = -\frac{5}{2}i$$

ce qui permet d'écrire que S a pour écriture complexe $z' = \frac{1}{2}iz - \frac{5}{2}i$.

b) On a $a = \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc $\text{Arg}(a) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ par suite S la similitude directe de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3. 4,5 points.

1. On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires par suite les points A, B et C définissent un plan.

2. Le vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ est un vecteur normal au plan (ABC) de ce fait, une équation cartésienne de ce plan est de la forme :

$$-2x - 2y + 2z + d = 0$$

Puisque $A \in (ABC)$ on en déduit que $d = 2x_A + 2y_A - 2z_A = -4$. Ainsi, le plan (ABC) a pour équation cartésienne dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$x + y - z + 2 = 0$$

3. Soit (P) le plan d'équation $x + y - z + 2 = 0$.

Soit f la réflexion d'axe (P) et $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Soit M un point de l'espace de coordonnées (x, y, z) , M' son image par f et K' le milieu du segment $[MM']$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{n} \quad \text{et} \quad K' \in (P)$$

on obtient

$$\frac{x' + x}{2} + \frac{y' + y}{2} - \frac{z' + z}{2} + 2 = 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = x + \lambda \\ y' = y + \lambda \\ z' = z - \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

d'où après calcul

$$\lambda = \frac{1}{3}(-2x - 2y + 2z - 4)$$

par suite on en déduit que f a pour expression analytique :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x - 2y + 2z - 4) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + y + 2z - 4) \\ z' = \frac{1}{3}(2x + 2y + z + 4) \end{cases}$$

4. Soit g la transformation de l'espace d'expression analytique .

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x + 2y - 2z - 4) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 2z + 4) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x - 2y - z + 8) \end{cases}$$

a) Soit M un point de l'espace de coordonnées (x, y, z) .

$$M \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(-x + 2y - 2z - 4) \\ y = \frac{1}{3}(2x - y - 2z + 4) \\ z = \frac{1}{3}(-2x - 2y - z + 8) \end{cases}$$

$$M \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - z + 2 = 0 \\ x - 2y - z + 2 = 0 \\ x + y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

$$M \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z + 2 \\ y = -z + 2 \end{cases}$$

Ainsi (D) est la droite affine de vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ passant le point de

coordonnées $(2, 2, 0)$. De plus, $(0, 0, 2) = 2(-1; -1; 1) + (2, 2, 0)$ donc $B \in (D)$.

b) Soit M un point de l'espace de coordonnées (x, y, z) et M' son image par g . On a :

$$\overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-x + 2y - 2z - 4) - x \\ \frac{1}{3}(2x - y - 2z + 4) - y \\ \frac{1}{3}(-2x - 2y - z + 8) - z \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(-2x + y - z + 2) \\ \frac{2}{3}(x - 2y - z + 2) \\ -\frac{2}{3}(x + y + 2z - 4) \end{pmatrix}$$

ainsi, $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{v} = -\frac{2}{3}(-2x + y - z + 2) - \frac{2}{3}(x - 2y - z + 2) - \frac{2}{3}(x + y + 2z - 4) = 0$ donc le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur normal à la droite (D) .

Soit L le milieu du segment $[MM']$. On a :

$$\begin{cases} x_L = \frac{x + x'}{2} = \frac{1}{3}(x + y - z + 2) \\ y_L = \frac{y + y'}{2} = \frac{1}{3}(x + y - z + 2) \\ z_L = \frac{z + z'}{2} = \frac{1}{3}(-x - y + z + 4) \end{cases}$$

par suite $x_L = -z_L + 2 = y_L$. On conclut donc que $L \in (D)$.

c) D'après ce qui précède, on en déduit que .

- si $M \in (D)$ alors $g(M) = M$,
- si $M \notin (D)$ alors (D) est la médiatrice du segment $[Mg(M)] = [MM']$

par suite, g est un demi-tour. Autrement dit une symétrie orthogonale par rapport à (D) .

5. a) Le vecteur $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ est un vecteur normal (P) colinéaire à $\vec{v}$ donc (P) et (D) sont orthogonaux. De plus, $B(0, 0, 2)$ appartient à (P) et (D) donc par conséquent (P) et (D) sont perpendiculaires.

b) Déterminons la nature de la transformation $f \circ g$.

Méthode 1 . calculatoire

Soit M un point de l'espace de coordonnées (x, y, z) . Posons $M' = g(M)$ et $M'' = f(M)$. On a

$$M'' = f \circ g(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{3}(x' - 2y' + 2z' - 4) \\ y'' = \frac{1}{3}(-2x' + y' + 2z' - 4) \\ z'' = \frac{1}{3}(2x' + 2y' + z' + 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = -x \\ y'' = -y \\ z'' = -z + 4 \end{cases}$$

$$M'' = f \circ g(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = -x + 2x_B \\ y'' = -y + 2y_B \\ z'' = -z + 2z_B \end{cases}$$

Fomesoutra.com
ça s'écrit !
Docs à portée de main

ainsi, on reconnaît l'expression d'une symétrie centrale par suite, $f \circ g$ est la symétrie centrale de centre B .

Méthode 2 . sans calcul

On a vu que $f \circ g$ la composée du demi-tour d'axe (D) et de la réflexion de plan (P) tels que (P) et (D) sont orthogonales au point B donc par conséquent d'après le cours, il s'agit d'une symétrie centrale de centre B .

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES : 6,75 points

- Dans cette question, on note l_0 la longueur à vide du ressort et Δl_0 l'allongement du ressort à l'équilibre.

Cas 1 : $m = 4\text{kg}$

On a $mg = k\Delta l_0$ d'où $k = \frac{mg}{\Delta l_0} = \frac{4 \times 9.8}{0.02} = 1960$.

Cas 2 : Étude avec une masse m donnée.

Posons $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1960}{m}} > 0$. La fonction $x : t \mapsto x(t)$ est solution de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$. Considérons l'équation caractéristique :

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

Cette équation admet pour racines les nombres complexes $-\omega i$ et ωi . Par conséquent on déduit que pour tout $t \geq 0$, $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ avec A et B des constantes réelles. Pour $t = 0$ on a, $x(0) = 0$ d'où $x(t) = B \sin(\omega t)$. Notons x_m le maximum de la fonction x . Soit T_0 le plus petit nombre réel strictement positif tel que $x(T_0) = x_m$. On a alors

$$x(T_0) = x_m \Rightarrow \frac{T_0}{\omega} = 2\pi$$

par suite, on a la relation :

$$10\sqrt{\frac{19}{m}} = \frac{T_0}{2\pi} \text{ m}$$

On sait d'après l'énoncé que $T_0 = 1$ d'où $10\sqrt{\frac{19}{m}} = \frac{1}{2\pi}$ par suite, $m \approx 75009 \text{ kg}$.

En conclusion : la masse maximale que cette balance peut porter est d'environ $m \approx 75009 \text{ kg}$ soit environ 7,5 tonnes.

- D'après la calculatrice on en déduit les résultats suivants :

- Le point moyen a pour coordonnées $(8.69, 243.3)$.

- La droite de régression linéaire admet pour équation : $Y=aX+b$ avec $a = 7.5576553890648$ et $b = 177.62397466903$.
- Le coefficient de corrélation est $r = 0.95649381980965$. Cela justifie bien que le système est linéaire car $r > 0,7$.
- La prédiction pour la valeur 13 est égale à :

$$7.5576553890648 \times 13 + 177.62397466903 = 275.87349472687$$

Ainsi, en guise de conclusion il pourra espérer un chiffre d'affaire d'environ de 276 000 000fcfa.

3. Soit N le nombre de jours nécessaire pour rencontrer les deux fournisseurs à la même date la première fois. Alors il existe deux entiers naturels a et b tels que

$$N + 21a = N + 7 + 16b$$

Considérons dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E) : $21a - 16b = 7$. D'après l'algorithme d'Euclide étendue on en déduit l'égalité :

$$7 = -21 \times 21 - 16 \times (-28)$$

Ainsi, les solutions de (E) sont les couples $(-21 + 16k, -28 + 21k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$a > 1 \Leftrightarrow -21 + 16k > 1 \Leftrightarrow k \geq 2$. Ainsi, pour $k = 2$ on a $a = 11$ et $N_0 = 231$ ce qui signifie que KEMO va rencontrer ses deux fournisseurs entre la première fois 231 jours plus tard à compter du 20 décembre 2020 c'est-à-dire qu'il va les croiser 8 mois et 7 jours plus tard soit le 8 Août 2021.

FIN DE L'ÉPREUVE