PROPOSITION DE CORRIGÉ

Epreuve de mathématique baccalauréat série C Cameroun

Session Juin 2022

PAR GILDAS MBA OBIANG

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES : 15 points

Exercice 1. ../ 5points

1. Soit (E) l'équation dans $\mathbb{C}$: $z^2+2-2i\sqrt{3}=0$
   Soit $z\in\mathbb{C}$ posons $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a :

$$|z|=x^2+y^2 \text{ et } z^2=x^2-y^2+2ixy$$

   Il s'ensuit que z est solution de (E) si et seulement si :

$$z^2=-2+2i\sqrt{3}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=-2\\x^2+y^2=4\\xy=\sqrt{3}\end{cases}$$

   c'est-à-dire si et seulement si $z=1+i\sqrt{3}$ ou $z=-1-i\sqrt{3}$. Ainsi, l'ensemble solution de (E) est la paire $\{1+i\sqrt{3};-1-i\sqrt{3}\}$

2. a) On a $|1-i\sqrt{3}|=2$ et $\arg(1-i\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Ainsi, on a l'égalité $z'=2e^{-\frac{\pi}{3}i}z$ puis on en déduit que S est la similitude directe de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.
   b) On a :

$$z'_A=(1-i\sqrt{3})z_A=4 \text{ et } z'_B=(1-i\sqrt{3})z_B=-4$$

   Ainsi, on a $S(A)=F$ et $S(B)=G$.

3. a) L'ellipse (ε') image de l'éllipse (ε) par S est l'éllipse de foyers F et G et d'excentricité $e=\frac{1}{2}$. Il est facile de voir que le centre de (ε') est le point O. De plus, on sait qu'une équation réduite de (ε) dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ est donnée par :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

   Par définition de (ε') on a :

$$\mathrm{OF}=\mathrm{OG}=c \text{ et } e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$$

de ces égalités on obtient : $c = |z_F| = 4$ et $a = 8$. Or, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 4\sqrt{3}$
il s'ensuit donc que l'équation réduite de (ε') dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est donné par :

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$

b) La construction de l'ellipse (ε) est déduit de l'éllipse (ε') en faisant une rotation de centre O, d'angle $\frac{\pi}{3}$ suivi d'une homothétie de centre O et de rapport $1/2$. On obtient la construction suivante :

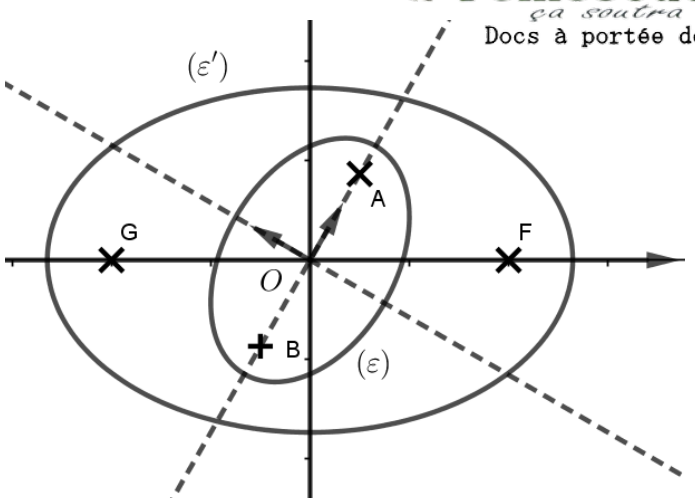


Figure.

4. On sait que l'axe focal de l'éllipse (ε') est l'axe des réels c'est-àdire $(O, \vec{u})$.
Soit D l'évènement : « choisir deux points de l'axe focal de l'éllipse (ε')» En notant Ω l'ensemble des choix possibles on a $\text{card}(\Omega) = A_5^2 = 5 \times 4 = 20$ et $\text{card}(D) = A_3^2 = 3 \times 2 = 6$, il s'ensuit que :

$$P(D) = \frac{6}{20} = 0.3$$

Exercice 2. ../ 5 points

1. a) La lettre k étant deja choisi pour désigner le vecteur $\vec{k}$ de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace vectoriel E ainsi, pour éviter toute confusion nous posons $E_\lambda = \{\vec{u} \in E \,/\, f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}\}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque $\lambda\vec{O} = \vec{O} = f(\vec{O}) \in E_\lambda$ on a $E_\lambda \neq \emptyset$.
Soit $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}) = \lambda(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v})$$

donc $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in E_\lambda$. Ainsi, on en déduit que E_λ est un sous espace vectoriel de E.
b) On suppose que $f \circ f = 2f$.
Soit $\vec{u} \in E$, $\vec{u} \in \text{Im}\, f \iff \exists \vec{v} \in E \,/\, \vec{u} = f(\vec{v}) \Longrightarrow f(\vec{u}) = f \circ f(\vec{v}) = 2f(\vec{v}) = 2\vec{u}$. Ainsi, on a $\vec{u} \in E_2$.
Réciproquement, si $\vec{u} \in E_2$ on a $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$ par suite $\vec{u} = f\left(\frac{1}{2}\vec{u}\right) = f(\vec{v})$ où $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u} \in E$. Ainsi, on a montrer que $\vec{u} \in \text{Im}\, f$ si et seulement si $f(\vec{u}) = 2\vec{u}$.

2. a) D'une part on a :

$$f(\vec{i}) = \frac{1}{2}[f(\vec{i}) + f(\vec{j}) + f(\vec{i}) - f(\vec{j})] = \frac{1}{2}(2\vec{i} + 2\vec{i}) = 2\vec{i}$$

On montre de la même façon l'égalité $f(\vec{j}) = 2\vec{j}$.
D'autre part,

$$f(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}) = f(\vec{i}) - f(\vec{j}) + f(\vec{k}) = 2\vec{i} - 2\vec{j} + f(\vec{k})$$

ainsi, $f(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}) = \vec{0}$ implique $f(\vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{j}$.

b) Notons par M la matrice de f dans la base $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. D'après **la question 2a** on en déduit que :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) En remarquant que

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2M$$

il s'ensuit que $f \circ f = 2f$.

d) Soit $\vec{u} \in E$ tel que $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
On a

$$\vec{u} \in \operatorname{Ker} f \Longleftrightarrow M\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$$

ainsi, $\operatorname{Ker} f$ est la droite vectorielle dirigée par $\vec{e_1} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

e) D'après **la question 2c** on a vu que $f \circ f = 2f$ alors on en déduit que :

$$\operatorname{Im} f = E_2 = \{\vec{u} \in E \,/\, f(\vec{u}) = 2\vec{u}\}$$

Soit $\vec{u} \in E$ tel que $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\vec{u} \in \operatorname{Im} f \Longleftrightarrow f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = 2(x\vec{i} + z\vec{j} + z\vec{k}) \Longleftrightarrow \vec{u} = (x-z)\vec{i} + (y+z)\vec{j}$$

ainsi, $\operatorname{Im} f$ est le plan vectoriel engendré par la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 3. ../ 5 points

1. La fonction $f : x \mapsto e^{-x}\cos x$ est au moins deux fois dérivables sur $[0, 2\pi]$ comme produit des fonctions $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto \cos x$ et pour tout $x \in [0, 2\pi]$ on a :

$$f'(x) = -e^{-x}(\cos x + \sin x) = -e^{-x}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ et } f''(x) = 2e^{-x}\sin x$$

ainsi, on a

$$f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 2e^{-x}\sin x - 2e^{-x}(\cos x + \sin x) + e^{-x}\cos x = 0$$

2. Soit $x \in [0, 2\pi]$. On a

$$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow -e^{-x}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$$

on en déduit le tableau de variation suivant :

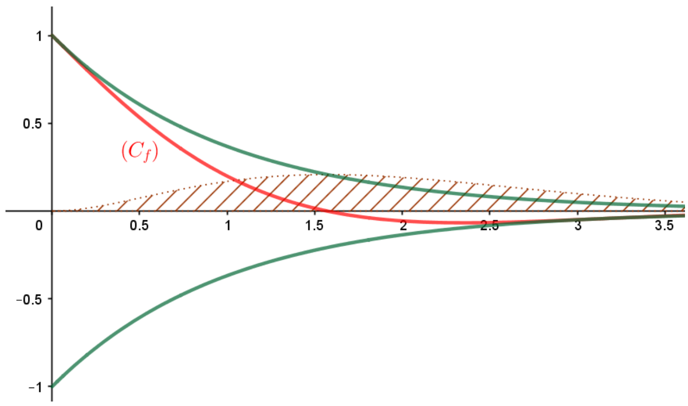
x	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	1	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{7\pi}{4}}$	$\searrow$	$e^{-2\pi}$

Tableau de variation de f.

3. a) Pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $e^{-x} > 0$ donc on a
$$-e^{-x} \leqslant e^{-x}\cos x \leqslant e^{-x}$$
c'est-à-dire
$$-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}$$

b) D'une part, on a
$$f(x) = e^{-x} \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x \in \{0, 2\pi\}$$
d'autre part,
$$f(x) = -e^{-x} \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi$$
On en déduit que les points d'intersection cherchés sont les points suivants de coordonnées :
$$(0, 1);\ (2\pi, e^{-2\pi}) \text{ et } (\pi, -e^{-2\pi})$$

4. Traçons la courbe de f.



Courbe représentative de la fonction f.

5. Notons $\mathscr{A}$ la valeur de cette aire en unité d'aire. On a :
$$\mathscr{A} = \int_0^{2\pi} (1 - \cos x)e^{-x}\,dx = \int_0^{2\pi} e^{-x}\,dx - \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$
Or, d'après **la questtion 1** on a :
$$f(x) = -\frac{1}{2}f''(x) - f'(x)$$

donc on en déduit que

$$\mathscr{A} = \left[\frac{1}{2}f'(x) + f(x) - e^{-x}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\pi})$$

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES : 5 points

1. Déterminons en combien d'années t le gisement **A** s'épuisera.
   Notons $q_A(t)$ la quantité de gaz extraite l'année $t \geqslant 0$. On a la relation pour tout $t \geqslant 1$,

   $$q_A(t+1) = q_A(t) + 0.75$$

   par suite, on en déduit que pour tout $t \geqslant 1$,

   $$q_A(t) = 0.75(t-1) + 5.01 = 0.75t + 4,26$$

   Soit S_t la quantité totale de gaz extraite du gisement **A**. On a

   $$S_t = 0.75\frac{t(t+1)}{2} + 4,26t$$

   ainsi, il y a épuisement du gisement **A** si et seulement si

   $$0.75\frac{t(t+1)}{2} + 4,26t = 100 \Leftrightarrow 0,375t^2 + 4,635t - 100 = 0$$

   c'est-à-dire $t \simeq 11,28$
   Conclusion : *il faudra 12 années à partir de sa première exploitation pour voir épuiser le gisement **A**.*

2. Soit $q(t)$ la quantité totale (en milliards de mètres cubes) de gaz extraite du gisement **B**. Le contenu du gisement séra épouser si $100 - q(t) \leqslant 0$ c'est-à-dire si $q(t) \geqslant 100$. Or, on sait que q vérifie l'équation différentielle $q'(t) = \frac{1}{2t+1} + 0,02t$ par suite,

   $$q(t) = \frac{1}{2}\ln(2t+1) + \frac{1}{100}t^2 + \xi$$

   avec $\xi \in \mathbb{R}$. On sait que $q(0) = 0$ d'où $\xi = 0$. Ainsi, pour chaque année t la quantité totale de Gaz extraite du gisement **B** est donnée par la formule :

   $$q(t) = \frac{1}{2}\ln(2t+1) + \frac{1}{100}t^2$$

   Il y aura épuisement si et seulement si $q(t) = 100$.
   Posons $h(t) = q(t) - 100$. On a $h'(t) = q'(t) = \frac{1}{2t+1} + 0,02t \geqslant 0$ donc h est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. De plus $h(0) < 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = +\infty$ on déduit que l'équation $q(t) = 100$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; +\infty[$. En utilisant la calculatrice on trouve que $\alpha \simeq 98,67$
   Conclusion : *Après l'inauguration, il faudra 99 années pour voir épuiser le gisement **B**.*

3. Soit $q(t)$ la quantité totale (en milliards de mètres cubes) de gaz extraite du gisement **C**. Le contenu du gisement séra épuiser si $q(t) \geqslant 100$. Or, on sait que q vérifie l'équation différentielle $q'(t) = 5.01q(t)$. On en déduit que :

   $$q(t) = \alpha e^{5.01t}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On sait que $5.01 = q(1) = \alpha e^{5.01}$ donc on en déduit que $\alpha = 5.01e^{-5.01}$. Ainsi, après t année la quantité totale de Gaz extraite du gisement **B** est donnée par la formule :

$$q(t) = 5.01e^{5.01(t-1)}$$

Il y aura épuisement si et seulement si

$$5.01e^{5.01(t-1)} = 100 \Leftrightarrow 5.01(t-1) = \ln\left(\frac{100}{5.01}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{100}{5.01}\right) + 5.01}{5.01} \simeq 1.59$$

Conclusion : *Après l'inauguration, il faudra 2 années pour vider le contenu du gisement **C**.*

FIN DE SUJET

1

1. Gildas Mba Obiang email : antoinegildas@gmail.com (pour toutes remarques et suggestions)