PROBLEMES TYPE BAC

PROBLEME 1

On considère la fonction numérique f d'une variation réelle définie par $f(x) = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\sqrt{|4-x|}$.

On appelle (C) sa courbe représentation dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité : $1cm$

1) a- Déterminer l'ensemble de définition D de f puis calculer les limites à ses bornes.

b- Etudier la dérivabilité de f en -2 . Interpréter le résultat.

c- Etudier la dérivabilité de f en 2 . Interpréter le résultat.

d- Déterminer la fonction dérivée $f'(x)$ de f .

2) Démontrer les équivalences logiques suivantes :

a) $3\sqrt{x^2-4} + 4x < 0 \Leftrightarrow x \,\epsilon]-\infty\,;\,-2]$.

b) $3\sqrt{4-x^2} - 4x < 0 \Leftrightarrow x \,\epsilon \left[-2\,;\,\frac{6}{5}\right]$.

En déduire le signe de $f'(x)$

3) Calculer la limite de $\left[f(x) + \frac{1}{5}x\right]$ $en - \infty$.

Interpréter le résultat.

4) Calculer la limite de $\left[f(x) + \frac{7}{5}x\right]$ $en + \infty$.

Interpréter le résultat.

5) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C) avec les axes de repère.

6) Tracer la courbe (C).

7) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty\,;-2[$.

a- Démontrer que h admet une fonction reciproque h^{-1} dont on precisera l'ensemble de definition et les variations

b- Justifier et tracer la courbe (C^{-1}) de la h^{-1} dans le même repère que (C).

PROBLEME 2

PARTIE A

Soit la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$$

1) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2) Etudier les variations de g.

3) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.

PARTIE B

Soit la fonction h définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$h(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$$

1) Déterminer la limite de h en $+\infty$.

2) Etudier les variations de g.

3) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.

4) On considère les fonctions m et n définies sur $[0\,;+\infty[$ par : $m(x) = \ln(1+x)$ et $n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

Sans étudier les fonctions m et n ; si on désigne par (C_m) et (C_n) les courbes représentatives respectivement des fonctions m et n . Donner en justifiant la position relative des courbes (C_m) et (C_n) sur $[0\,;+\infty[$.

PARTIE C

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 \;\; si\; x = 0 \\ f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} \;\; si\; x > 0 \end{cases}.$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 3 cm.

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat.

2) a- Etudier la continuité de f en 0^+.

b- Etudier la dérivabilité de f en 0^+, puis interpréter graphiquement le résultat.

3) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

4) Déterminer l'équation de la tangente en $A(0\,;1)$.

5) Donner le signe de f sur $[0\,;+\infty[$ puis en déduire la position relative de (C) avec l'axe d'équation $y = 0$.

6) a- Montrer que f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ vers un intervalle K à préciser.

b- Sans expliciter la fonction bijective $f^{-1}(x)$, dresser en justifiant son tableau de variation .

c- On désigne par (C^{-1}) la courbe de la fonction bijective f^{-1}. Expliquer brièvement sa construction.

7) Construire dans le même repère les courbes (C) et (C^{-1}).

PROBLEME 3

PARTIE A

On considère la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = -1 + x - xlnx \;\; si\; x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}.$$

1) Déterminer le domaine de définition de g.

2) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

3) a- Etudier la continuité de g en 0^+.

b- Etudier la dérivabilité de g en 0^+, puis interpréter graphiquement le résultat.

3) Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.

4- En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.

PARTIE B

Soit la fonction h définie par : $h(x) = 2xlnx + 1$

1) Déterminer le domaine de définition de h puis calculer les limites de h aux bornes de son domaine de définition.

2) Etudier les variations de h.

3) a- Montrer que l'équation $h(x) = 2$ admet une unique solution α et que $\alpha \in [1\,;2]$.

PARTIE C

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{2x^2} + \frac{lnx}{x} - x$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2 cm.

1) a- Déterminer le domaine de définition de f .

b- Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

c- Interpréter graphiquement les résultats si possibles.

2) Montrer que $f(\alpha) = \frac{(1-\alpha)(\alpha^2+\alpha+1)}{\alpha^2}$.

3) a- Montrer que $f(x) = \frac{g(x)}{x^3} - 1$.
b- Etudier les variations de g.
c- Montrer que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un seul point A d'abscisse $\beta \in \left[\frac{1}{2}\,;\frac{5}{3}\right]$.
4) a- Montrer que la droite (D): $y = -x$ est une asymptote à la courbe (C).
b- Etudier la position relative de la courbe (C) et la droite (D).
5) a- Déterminer l'équation de la tangente (T) la courbe (C) au point d'abscisse 1.
b- Donner la position relative des droites (T) et (D).
6) a- Montrer que f réalise une bijection de $]0\,;+\infty[$ vers un intervalle L à préciser.
b- Sans expliciter la fonction bijective $f^{-1}(x)$, dresser en justifiant son tableau de variation .
c- On désigne par (C^{-1}) la courbe de la fonction bijective f^{-1}. Expliquer brièvement sa construction.
d- Justifier que $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.
e- Démontrer que f^{-1} est dérivable en $-\frac{1}{2}$ puis calculer $(f^{-1})'\left(-\frac{1}{2}\right)$.
7) Construire dans le même repère les courbes (C) , les droites particulières et (C^{-1}).

PROBLEME 4

Soit la fonction numérique de la variable réelle définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$.
Soit (C) la représentation graphique de f dans un plan muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $\|\vec{\imath}\| = 1cm$; $\|\vec{\jmath}\| = 2cm$.
1) Etudier l'ensemble de définition de f puis calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
2) Déterminer la fonction dérivée de f.
3) Etudier les variation de f.
4) Dresser le tableau de variation de f.
5) Soit (P) la parabole d'équation $y = \frac{1}{2}x^2$.
Etudier la position de (C) par rapport à (P).
6) Montrer qu'il existe un réel x_0 de l'intervalle $\left]-2\,;-\frac{3}{2}\right[$ $tel\ que\ f(x_0) = 0$.
7) Construire (P) puis (C) sur le même graphique.
8) soit $\propto$ un réel tel que $0 < \propto < 1$.
$Calculer\ en\ cm^2\ l'aire\ A(\propto)\ de\ l'ensemble$
Des points $M(x\,;y)$ vérifiant $\begin{cases} \propto \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq f(x) \end{cases}$
9) soit (U_n) la suite définie pour n non nul par $U_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$
a- Calculer U_1 , U_2 et U_3
b- Calculer $U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$.

PROBLEME 5

PARTIE A :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - e^{x-1}$.
1) Etudier les variations de g.
2) Donner le signe de $g(x)\ sur\ \mathbb{R}$.
3) En déduire que $xe^{-x} \leq \frac{1}{e}$ et que $1 - xe^{-x} > 0$.

PARTIE B :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité 2cm.
1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Vérifier que $f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}$.
3) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
4) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
5) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'ordonnée 1.
6) Tracer $(T)\ et\ (C)$. On admettra que (C) est au-dessus de (T) pour $x < 0$ et en – dessous de (T) pour $x > 0$.
7) Déterminer les images par f des intervalles $[0; 1]\ et\ [1; +\infty[$.
8) En déduire que $\forall\, x \in [0; +\infty[$; $1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}$.

PARTIE C :

1) Donner une interprétation géométrique du nombre I = $\int_0^1 f(x)\,dx$.
2) On pose $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_0^1 x^n e^{-nx}\,dx$.
a- A l'aide d'une intégration par partie montrer que $J_1 = 1 - \frac{2}{e}$.
b- On se propose de calculer J_2 sans utiliser des intégrations par parties ; déterminer les réels a , b et c tels que $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ soit une primitive de $h(x) = x^2e^{-2x}$.
En déduire que $J_2 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{5}{e^2}\right)$.
3) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $U_n = 1 + J_1 + J_2 + \ldots + J_n$.
a- Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$,
$1 + xe^{-x} + x^2e^{-2x} + \ldots + x^ne^{-nx} = \frac{1-(xe^{-x})^{n+1}}{1-xe^{-x}}$.
b- En déduire que : $-U_n = \int_0^1 x^{n+1}e^{-(n+1)x} f(x).dx$.
c- En utilisant A.3 et B.8 , Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq x^{n+1}e^{-(n+1)x} f(x) \leq \frac{1}{e^n(e-1)}$.
d- En déduire un encadrement de $I - U_n$; étudier la convergence de la suite(U_n).
4) Montrer que $U_2 \leq I \leq U_2 + \frac{1}{e^2(e-1}$.

PROBLEME 6

PARTIE A :

Soit g la fonction numérique dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et définie par : $g(x) = lnx - e^{1-x} + 1$.

1) Calculer la limite de g en 0 et en $+\infty$.
2) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.
3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\propto$ sur $]0\,;+\infty[$.
4) Calculer $g(1)$ et donner le signe de g sur $]0\,;\ +\infty[$.

PARTIE B :

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\ +\infty[$ par :

$\begin{cases} f(x) = xlnx + e^{1-x}\ ;\ x > 0 \\ f(0) = e \end{cases}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité OI = 2cm et OJ = 1cm.

1) Calculer les limites en $+\infty$ $de\ f(x)\ \ et\ de\ \frac{f(x)}{x}$.
Interpréter les résultats.
2) Démontrer que f est continue en 0.
3) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.
4) Etudier les variations de f.
5) Tracer la courbe (C) et ses asymptotes.

PARTIE C :

A l'aide d'une intégration parties, calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = 1\,, x = 2\ et\ y = 0$.

PROBLEME 7

PARTIE A :

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\ ; si\ \ x\,\epsilon\ ]-\infty\,; 0] \\ f(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\ \ ; si\ \ x\,\epsilon\ ]0\,;\ +\infty[\end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2cm .
1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Montrer que pour $x\,\epsilon\ ]0\,;\ +\infty[$,
$\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x}$
3) Calculer les limites en $-\infty\,;\ +\infty\ et\ en\ 1\ \ de\ f(x)$.
Interpréter les résultats si possibles.
4) Etudier le signe de $f(x) - 2x$ sur $]-\infty; 0]$. Quelle conséquence graphique peut – on tirer ?
5) Démontrer que f est continue en 0.
6) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.
7) Etudier les variations de f.
8) Tracer la courbe (C) et ses asymptotes.

PARTIE B :

Soit h la restriction de f à $]-\infty; 0]$ et (C^{-1}) la courbe représentative de sa bijection réciproque h^{-1} dans le même repère.
1) Montrer que h est bijective vers un intervalle J à préciser. Déterminer le domaine $D_{h^{-1}}$.
2) Etudier les variations de h^{-1}.
3) Expliquer la construction de (C^{-1}) puis construire (C^{-1}).

PARTIE C :

Soit k la restriction de f à $]0\,;\ +\infty[$.
1) Montrer que k est bijective vers un intervalle I à préciser. Déterminer le domaine $D_{k^{-1}}$.
2) Etudier les variations de k^{-1}.
3) Expliciter la fonction bijective k^{-1}.

PARTIE D :

On considère la suite $(U_n)_{n>1}$ définie par $U_n = f(n)$
1) a- Donner l'expression de U_n en fonction de n.
b- Déterminer les trois premiers termes de $(U_n)_{n>1}$
c- La suite $(U_n)_{n>1}$ est -elle convergente ?
2) Soit la suite $(S_n)_{n>1}$ définie par $S_n = \sum_{k=2}^{n} U_k$.
a- Exprimer la somme S_n en fonction de n.
b- La suite $(S_n)_{n>1}$ est -elle convergente ?
3) Soit la suite $(V_n)_{n>1}$ définie par :
$V_n = \sum_{k=2}^{n} U_k + 2\ln(n)$.
a- Montrer que $V_n = ln2 - ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$
b- Montrer que la suite $(V_n)_{n>1}$ est convergente .

PROBLEME 8

PARTIE A :

Soit g la fonction numérique dérivable sur $]3\,;\ +\infty[$ et définie par : $g(x) = x - 2 - (x-3)\ln(x-3)$.
1) Calculer la limite de g en 3 et en $+\infty$.
2) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.
3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\propto$ sur $]3\,;+\infty[$ telle que $6 < \alpha < 7$.
4) Donner le signe de g sur $]3\,;\ +\infty[$.

PARTIE B :

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\ +\infty[$ par :

$\begin{cases} f(x) = x^2 - 3x - 4\,; si\ \ x\,\epsilon\ ]-\infty\,; 4] \\ \quad f(x) = \frac{2\ln(x-3)}{x-2}; si\ \ x\,\epsilon\ ]4\,;\ +\infty[\end{cases}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 1cm.

1) Calculer les limites en $+\infty$ $de\ f(x)$. Interpréter les résultats.
2) Calculer les limites en $-\infty$ $de\ f(x)\ \ et\ de\ \frac{f(x)}{x}$.
Interpréter les résultats.
3) Etudier la continuité de f en 4.
4) Etudier la dérivabilité de $f\ en\ 4$ puis interpréter graphiquement le résultat.
5) Etudier les variations de f.
6) Résoudre sur $]-\infty\,; 4]$, l'équation $f(x) = 4$.
7) Exprimer $f(\alpha)$ en fonction de α .
8) Tracer la courbe (C) et ses asymptotes.
On prendra $\alpha = 6{,}5\ et\ f(\alpha) = 0{,}56$
9) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C)et les droites d'équations $x = -1\,, x = 0\ et\ y = 0$

PROBLEME 9

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -\sqrt{1-e^{2x}} \ \ si\ x \leq 0 \\ f(x) = x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\ \ si\ \ x > 0 \end{cases}$$

On désigne par D domaine de définition et (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$. Unité graphique : 2 cm

1) a- Déterminer D.

b- Calculer la limite de $f(x)$ en $+\infty\ et\ en - \infty$.

2) a- Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b- Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

3) Etudier le sens de variation de f sur $]-\infty\,;0[$.

4) a- Calculer $f'(x)\ et\ f''(x)$ sur $]-\infty\,;0[$.

b- Déterminer le sens de variation de f'. Déduire le signe de $f'(x)$ pour tout x élément de $]0\,;\ +\infty[$.

5) Dresser le tableau de variation de f.

6) Etudier la position relative de (C) et de la droite d'équation $y = 2$.

7) Construire (C)

8) Soit α un nombre réel tel que $0 < \propto < 1$. On désigne par $A(\propto)$ l'aire du domaine délimité par la courbe (C), les droites d'équation $y = 2\,;\ x = \propto\ et\ x = \frac{2}{e-1}$.

a- Calculer $A(\propto)$.

b) Calculer la limite de $A(\propto)$ quand $\propto$ tend vers 0^+. Quelle interprétation géométrique peut-on donner du résultat obtenu ?

PROBLEME 10

PARTIE A

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie

par : $\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}}\,si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = -x\ln|x|\ \ si\ x < 0 \end{cases}$

Soit (C) la courbe de f dans un repere orthonormé $(O\,,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ unité graphique : 2cm

1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) La fonction f est-elle continue en 0 ?

3) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

4) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

5) a- Démontrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

b- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$. Interpréter le résultat.

6) Déterminer les équations des demi-tangentes à la courbe (C) au point O .

7) Soit A le point d'intersection de la courbe (C) et de l'axe (OX) diffèrent du point O.

a- Déterminer les coordonnés de A.

b- Donner l'équation réduite de la tangente à (C) en A .

8) Construire la courbe (C) de f.

PARTIE B

Soit (E) le domaine par : $\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$

Nous nous proposons de calculer l'aire de ce domaine (E).

1) Calculer auparavant l'aire du domaine , défini par $\begin{cases} -1 \leq x \leq \propto \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$; $avec - 1 \leq \propto < 0$

2) En déduire l'aire du domaine (E) . **On donne :** $\boldsymbol{e \approx 2,7}$

PROBLEME 11

PARTIE A

Soit la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}$$

1) Déterminer les limites de g aux bornes de $]0\,;+\infty[$.

2) Etudier les variations de g.

3) a- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\alpha \in [0{,}5\,;0{,}6]$.

b- En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \ 0\ \ si\ x = 0 \\ f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ \ si\ x > 0 \end{cases}.$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité 3 cm.

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat.

2) a- Etudier la continuité de f en 0^+.

b- Etudier la dérivabilité de f en 0^+, puis interpréter graphiquement le résultat.

3) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

4) Déterminer l'équation de la tangente en $A(1\,;ln2)$.

5) Donner le signe de f sur $[0\,;+\infty[$ puis en déduire la position relative de (C) avec l'axe d'équation $y = 0$.

6) Soit h la restriction de f à $[1;+\infty[$.

a- Montrer que h réalise une bijection de $[1;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

b- Sans expliciter la fonction bijective $h^{-1}(x)$, dresser en justifiant son tableau de variation .

c- On désigne par (C^{-1}) la courbe de la fonction bijective h^{-1}. Expliquer brièvement sa construction.

7) Construire dans le même repère les courbes (C) et (C^{-1}).

PARTIE C

On pose $I = \int_1^2 f(x).dx$.

1) Interpréter géométriquement I .

2) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire du domaine du plan délimité par la courbe, l'axes des abscisses et les droites d'équations $x = 1\ et\ x = 2$.

Données numériques :

$\ln(2) \simeq 0{,}69\,;\ln(3) \simeq 1{,}1\ et\ \ f(\alpha) \simeq 0{,}84$

PROBLEME 12

PARTIE A

Soit la fonction f définie par : $f(x) = ln\left(2 - \frac{x}{2}\right)$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1) a- Déterminer le domaine de définition de f .

b- Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. Interpréter graphiquement les résultats si possibles.

2) Calculer les limites en $-\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$.

Interpréter les résultats.

3) Etudier les variations de f.

5) Déterminer l'équation de la tangente (T) la courbe (C) au point d'abscisse 2

6) Construire dans le même repère les courbes (C) , On placera le point d'abscisse -6.

PARTIE B

Soit la fonction g définie par : $g(x) = e^x - 2 + \frac{x}{2}$.

1) a- Déterminer le domaine de définition de g .

b- Calculer les limites de g aux bornes de son domaine de définition .

2) Etudier les variations de g.

3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\propto$ sur $\mathbb{R}$.

4) a- Montrer que $f(\alpha) = \alpha$.

b- Montrer que $\forall\, x \in [0\,;2]$, $f(x) \in [0\,;2]$.

c- Montrer que $\forall\, x \in [0\,;2]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

5) Déterminer les réels a et b tel que $\frac{x}{4-x} = a + \frac{b}{4-x}$.

6) Soit $h(x) = 2x + (8-2x)ln\left(2 - \frac{x}{2}\right) + (x-4)\left[ln\left(2 - \frac{x}{2}\right)\right]^2$ et $k(x) = \left[ln\left(2 - \frac{x}{2}\right)\right]^2$

Dériver $h(x)$. Quelle remarque peut – on faire ?

PARTIE C

1) Soit (Δ) le domaine du plan délimité par la courbe (C) et les droites d'équations $x = \propto$, $x = 2$ et $y = 0$.

a- Calculer en cm² l'aire du domaine (Δ). (l'expression ne doit pas comporter ni $ln \propto$ ni $e^{\propto}$) .

b- Calculer en cm³ le volume du solide engendré par la rotation du domaine (Δ) autour de l'axe des abscisses. (l'expression ne doit pas comporter ni $\ln \propto$ ni $e^{\propto}$.

2) On définie la suite (U_n) par $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = f(U_n)$ et $U_0 = 1$.

a- Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $U_n \in [0\,;2]$.

b- Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

c- Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

d- Montrer que la suite (U_n) est convergente .

e- A partir de quel valeur n_0 de n est – on sure que $|U_n - \alpha| \leq 10^{-3}$?

Données : $\propto = 0{,}55$; $\ln 2 = 0{,}69$; $\ln 10 = 2{,}3$

PROBLEME 13

On considère la fonction f definie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -x + 1 + 2\ln x \; si \; x \in \;]0\,;\,1[\\ f(x) = x - 2 + e^{1-x} \; si \; x \in \;[1;\,+\infty[\end{cases}$$

PARTIE A

1) Etudier la continuité de f en 1 .

2) Etudier la dérivabilité de f en 1 .

Interpréter le résultat.

3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

4) On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repere orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité : 2cm)

a- Montrer que (C) admet une asymptote $+\infty$ dont on donnera une équation.

Quelle est l'équation de la deuxième asymptote

b- Tracer (C) et son asymptote oblique. On placera les points d'abscisses $\frac{1}{2}$ et 2 et on tracera les demi-tangente à (C) au point d'abscisse 1.

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0\,;1[$.

a- Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont précisera l'ensemble de définition.

c- Justifier la construction de la courbe (C^{-1}).

d- Construire la courbe (C^{-1}) dans le même repère que (C).

PARTIE B

1) Soit h la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $h(x) = -|f(x)|$

Sans étudier explicitement h, construire en pointillés la courbe représentative (C') de h dans le repere $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (Justifier)

2) On considère un réel $\propto$ superieur à 2.

Soit $A(\propto)$ l'aire de la partie du plan délimitée par les droites équations $x = 2$, $x = \propto$, $y = x - 2$ et la $courbe$ (C).

a- Calculer $A(\propto)$ en fonction de $\propto$.

b- Déterminer la limite de $A(\propto)$ quand $\propto$ tend vers plus l'infini.

3) Pour la suite , A représenté l'aire de la portion de plan comprise entre les droites d'équation $x = 1$; $x = 2$ et les $courbes$ (C) et (C') on note V le volume engendre par la rotation de A' autour de l'axe des abscisses.

a- Calculer en intégrant par parties,$I = \int_1^2 (x-2)e^{1-x}dx$

b- Calculer V en cm^3.

On donne : $e \approx 2{,}72$; $e^2 \approx 7{,}39$; $e^{-1} \approx 0{,}36$; $e^{-2} \approx 0{,}135$; $\ln 2 \approx 0{,}69$

PROBLEME 14

PARTIE A

Soit $g(x) = x\ln x - 1$

1) Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variations.

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\propto$ tel que $\propto \in\,]1{,}6\,;1{,}8[$.

3) Déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

PARTIE B

On considère la fonction f $definie\ par$: $f(x) = \frac{1+x}{1+\ln x}$

1) Justifier que l'ensemble de définition de f $est\ tel\ que$ $D_f = \left]0; \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}\ ;\ +\infty\right[$.

2) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b- Interprète graphiquement les résultats des limites de f à gauche et à droite en $\frac{1}{e}$.

3) a- Démontre que $\forall x \in D_f . f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+\ln x)^2}$

b- Donner le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

c- En déduire le sens de variations de f et dresser le tableau de variations de f.

d- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 .

4) Calculer la limite en $+\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$ et donne une interprétation géométrique du résultat.

5) Démontrer que $f(a) = a$.

6) Tracer les asymptotes à (C), la tangente (T) et la courbe (C). On prendra $a = 1{,}7$ pour la construction de (C)

PARTIE C

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ par :

$h(x) = \frac{1}{2}x^2\left(-\frac{1}{2} + \ln x\right)$

1) Démontrer que h est une primitive sur $]0\ ;\ +\infty[$ $de\ la\ fonction$ $k(x) = x\ln x$.

2) En déduire les primitives de g sur $]0\ ;\ +\infty[$ puis la primitive G de g sur $]0\ ;\ +\infty[$ prenant la valeur 2 $en\ e$.

PROBLEME 15

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 + \frac{3e^x}{e^x+2}\ ; si\ x \le 0 \\ x + 2 + \frac{ln(x+1)}{x+1}\ ; si\ x > 0 \end{cases}$$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm.

1) Etablir que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Etudier la continuité de f en 0.

3) Pour $x < 0$, montrer que $\frac{f(x)-2}{x-0} = 1 + \frac{2(e^x-1)}{x} \times \frac{1}{(e^x+2)}$.

En déduire $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)-2}{x-0}$.

4) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement les résultats.

5) a- En utilisant les variations de la fonction h définie par $h(x) = lnx - x$, montrer que $lnx < x\ pour\ x > 0$.

En déduire que $ln(x+1) < (x+1)^2\ pour\ x > 0$.

b- Calculer $f'(x)\ pour\ x > 0$ et déterminer son signe.

c- Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$ et donner son signe.

6) a- Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition D_f.

b- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x+1)]$ et interpréter graphiquement le résultat.

c- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+2)]$ et interpréter graphiquement le résultat.

d- Etudier le signe de $f(x) - (x+1)$ pour $x < 0$ et interpréter graphiquement les résultats.

e- Montrer que $f(x) - (x+2) > 0$ pour $x > 0$ et interpréter graphiquement les résultats.

7) Déterminer les coordonnées du point A de la courbe où la tangente est parallèle à l'asymptote pour $x > 0$.

8) Etablir que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle J à préciser.

9) Représenter graphiquement les courbes de $f\ et\ f^{-1}$ dans un même repère.

10) Calculer $\int_{-ln3}^{0} [f(x) - (x+1)].dx$.

11) Interpréter le résultat précédent en terme d'aire.

PROBLEME 16

PARTIE A

Soit la fonction u définie sur $[0\ ;+\infty[$ par :

$u(x) = 1 - x - 2lnx$

1) Etudier les variations de u.

2) Calculer $u(1)$ et en déduire le signe de $u(x)$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2e^{x-1} - x\ ; si\ x < 1 \\ f(x) = \frac{x + lnx}{x^2}\ ;\ ; si\ x \ge 1 \end{cases}$$; On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repere orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité : 2cm).

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Calculer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de $f(x)$. Interpréter les résultats si possibles.

3) Etudier la continuité de f en 1 .

4) Etudier la dérivabilité de f en 1 . Interpréter le résultat.

5) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

6) Montrer que (C) admet une asymptote d'équation $y = -x$.

7) Tracer (C) .

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1\ ;+\infty[$.

a- Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont précisera l'ensemble de définition.

b- Justifier la construction de la courbe (C^{-1}) de g^{-1}.

c- Construire la courbe (C^{-1}) dans le même repère que (C).

PARTIE B

On considère les intégrales $L = \int_1^e f(x)\,.dx$ et $K = \int_1^e \frac{lnx}{x^2}.dx$.

1) Donner une interprétation de L.

2) A l'aide d'une intégration par partie, calculer K.

3) Calculer l'intégrale L.

4) Soit (E) le domaine par : $\begin{cases} 1 \le x \le e \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$ calculer l'aire de ce domaine (E).

On donne : $e \approx 2,7$ et $ln2 = 0,7$

Contacts : 75 35 20 04 / 72 25 57 26